معها ، وتتضمن تحديد البدائل الممكنة والقيود اللازمة ومعيار تقييم المتغيرات ونذكر هنا ان اي خطأ في تمثيل المتغيرات يؤدي الى اصدار قرارات خاطئة .

ثالثاً – ايجاد حل للنموذج الرياضي وايجاد قيم المتغيرات الداخلة في بناء النموذج .

رابعاً – اختبار النتائج التي حصلنا عليها نتيجة حل النموذج والتأكد من مدى مطابقتها مع ظروف المشكلة .

خامساً – تطبيق الحل وترجمة النموذج الى اسلوب عمل وتقديمه للجهات المختصة لدراسة تطبيقه .

نظرية القرارات **Decisions Making Theory**

- مشكلة صنع القرار Decision Making Problem

هي طريقة تحليلية منهجية للتعامل مع المشاكل بأسلوب علمي منظم وبالاستعانة بمنهج كمي يساعد في تقييم واختيار البدائل المثلى .

بعض المفاهيم المهمة :

- **القرار : Decision**

اختيار بديل من بين مجموعة من البدائل بهدف تحقيق هدف او مجموعة اهداف معينة .

- **العناصر الاساسية للقرار : Steps of Decision**

الاختيار : Choice

مجموعة من البدائل المتاحة : Alternative

مجموعة من الاهداف : Goals

ماهو القرار الجيد ؟

هو الذي يبنى على المنطق ويدرس جميع البدائل ويعتمد الاساليب الكمية كمنهج علمي لاتخاذه .

- **مصفوفة القرارات : Decision Matrix**

عبارة عن مجموعة صفوف او اعمدة حيث تمثل الصفوف الخيارات او البدائل المتاحة امام متخذ القرار في حين ان الاعمدة تمثل حالات الطبيعة او الظروف الخارجية المحتمل حصولها .

- **العائد (المردود او الناتج) : Outcomes**

هو الربح او الخسارة التي تنتج عن تبني استراتيجية معينة وحصول ظرف خارجي معين .

- **الاستراتيجية (البديل) : Strategy**

الاساليب او طرق العمل التي يلجأ اليها المدير لتحقيق اهدافه في ظل حالات طبيعية معينة .

- **حالات الطبيعة : States of Naturel**

هي الظروف او العوامل الخارجية التي يمكن ان تؤثر في العائد او نتيجة القرار دون ان يكون لمتخذ القرار سيطرة عليها .

ظروف صنع القرار Decision Making Condition

هناك حالات لصنع القرار منها :

- حالة التأكد التام Certainty
- حالة عدم التأكد Uncertainty
- حالة المخاطرة Risk

- ان كل من هذه الحالات لها سمات تميزها عن غيرها وتجعل من عملية صنع القرار في ظلها مختلفة من حيث درجة التعقيد وسهولتها او صعوبتها كما ان لكل ظرف أساليب او نماذج كمية يمكن ان تُعتمد لمساعدة متخذ القرار .

اولاً: حالة التأكد التام Certainty

الحالة التي يعرف فيها متخذ القرار العائد الذي ينتج عن تبني اي من البدائل المتاحة على وجه الدقة والتأكد التام .

مثال تطبيقي 1:

يرغب احد المستثمرين استثمار مبلغ معين من المال حيث ان العائد الذي يأمل الحصول عليه من كل مجال من مجالات الاستثمار موضح ادناه : والمطلوب تحديد استراتيجية الاستثمار المثلى التي تعظم العائد .

مجال الاستثمار	العائد المتوقع
وديعة حكومية S_1	5%
سندات حكومية S_2	6%
شهادات استثمار S_3	5.5%

القرار : اختيار اكبر عائد وهو استثمار في السندات الحكومية اي الاستراتيجية الثانية حيث تمثل اكبر عائد وهو 6% .

مثال تطبيقي 2 :

يفكر رجل ان يسافر من مدينته الى مدينة اخرى ويرغب في اختيار وسيلة النقل الاقل تكلفة من بين وسائل النقل المختلفة والتي ادرجت في الجدول الاتي :

م/ تحديد الاستراتيجية المثلى التي تحقق اقل تكلفة ممكنة للسفر ؟

وسيلة النقل	التكلفة النقدية بالدولار
سيارة خاصة S_1	20$
باص سوبر جت S_2	10$
قطار S_3	18$
سيارة اجره S_4	14$
طائرة S_5	50$

القرار: اختيار الاستراتيجية الثانية الاقل في التكلفة بقيمة 10$.

ثانياً : حالة عدم التأكد Uncertainty

حالة تتعدد فيها الاستراتيجيات وحالات الطبيعة مع عدم وجود معلومات ولا احتمالات لحصول حالات الطبيعة ، لذلك لابد من الاستعانة بأربعة معايير شائعة الاستخدام في ظل ظروف عدم التأكد .

١- معيار التشاؤم (افضل الاسوأ) Maximin criterion
٢- معيار التفاؤل (افضل الافضل) Hurwitz criterion
٣- معيار لابلاس (تساوي الاحتمالات) Laplace criterion
٤- الحد الادنى للندم Savage criterion

١- معيار التشاؤم : ويسمى معيار والد نسبة الى العالم Abraham Wald ، يقوم هذا المعيار على افتراض التشاؤم في الحالة النفسية لمتخذ القرار في انه يتوقع حدوث أسوأ الظروف ثم يختار افضل اسوأ احتمال بأعتماد تحديد أسوأ النتائج في كل استراتيجية من الاستراتيجيات ومن ثم اختيار كل بديل البديل الافضل الذي سيكون اعلى الارقام في حالة الارباح اما في حالة تقليل التكاليف فأن البديل الافضل يكون اختيار ادنى رقم فيها .

مثال تطبيقي ١ : اعتمد معيار والد لاختيار الاستراتيجية المثلى لحالة تعظيم الارباح بقيمة آلاف الدنانير للمصفوفة الاتية ؟

N / S	N1	N2	N3	N4
S1	15	18	40	35
S2	26	19	28	17
S3	40	36	41	26
S4	28	22	32	19

الحل // نحدد ادنى القيم في كل استراتيجية من الاستراتيجيات لانها مصفوفة ارباح فيكون :

N / S	معيار التشاؤم
S1	15
S2	17
S3	26
S4	19

ويكون القرار : اختيار افضل الاسوأ وهو الاستراتيجية الثالثة حيث تمثل اعلى القيم وهي $S_3 = 26$

مثال تطبيقي ٢ : اعتمد معياروالد لاختيار استراتيجية مثلى في حالة تقليل التكاليف بقيمة الاف الدنانير؟

N / S	N1	N2	N3	N4
S1	40	55	43	35
S2	32	41	48	40
S3	45	38	36	51

نحدد اسوأ القيم في كل استراتيجية ولانها مصفوفة تكاليف فيكون :

S \ N	معيار التشاؤم
S1	55
S2	48
S3	51

ثم نختار القيمة الاقل من بين قيم الاستراتيجيات وهي 48 = S_2

ثانياً : معيار التفاؤل (افضل الافضل) (Maximax) Hurwitz Criterion

يقوم هذا المعيار على افتراض التفاؤل في الحالة النفسية لمتخذ القرار واختيار البديل الذي يعطي افضل النتائج ويسمى هذا المعيار معيار الواقعية وينسب للعالم loind Hurwitz. ويأخذ بنظر الاعتبار أفضل النتائج وأسوئها في كل استراتيجية وكذلك مراعاة الحالة النفسية لمتخذ القرار ومدى كونه متفائلاً او متشائماً حيث يتم تحديد معامل التفاؤل وتتراوح قيمته بين (1-0).

ويتم اختيار البديل الافضل وفق الخطوات الاتية :

١- يتم اختيار افضل النتائج في كل استراتيجية وكذلك أسوأ النتائج فيها .
٢- تحديد معامل التفاؤل وسيكون متمم هذا المعامل هو معامل التشاؤم فإذا كان معامل التفاؤل (0.6) فأن معامل التشاؤم هو (0.4)
٣- ضرب افضل النتائج في كل استراتيجية بمعامل التفاؤل وكذلك ضرب أسوأ النتائج بمعامل التشاؤم وجمع القيمتين .
٤- اختيار أعلى الارقام في حالة تعظيم الارباح واختيار اقل الارقام في حالة تقليل التكاليف .
ملاحظة : اذا لم يتم ذكر معامل التفاؤل او التشاؤم يعامل على انه حالة التأكد التام .

مثال ١ //
توضح المصفوفة الاتية العوائد المتوقعة من تبني اي من الاستراتيجيات الاربعة المتاحة امام متخذ القرار وحصول اي حالة من حالات الطبيعة . والمطلوب / اعتماد معيار التفاؤل لتحديد افضل استراتيجية بهدف تعظيم الربح علماً ان معامل التفاؤل هو 0.6 ؟

S \ N	N1	N2	N3
S1	10	8	4
S2	12	10	8
S3	8	5	12
S4	20	16	18

الحل // نحدد افضل النتائج في كل استراتيجية وضربها في معامل التفاؤل ونحدد أسوأ النتائج في كل استراتيجية وضربها في معامل التشاؤم والذي يساوي 0.4

N / S	Best	worst	Result
S1	10* 0.6	4*0.4	7.6
S2	12*0.6	8*0.4	10.4
S3	12.0.6	5*0.4	9.2
S4	20*0.6	16*0.4	18.4

القرار: تبني البديل الرابع الذي سيحقق أعلى قيمه وهي 18.4

مثال ٢// لنفس بيانات المثال الاول(باعتبار المصفوفة مصفوفة تكاليف) اعتمد معيار التفاؤل لتحديد افضل استراتيجية بهدف تقليل التكاليف علماً ان معامل التفاؤل هو 0.6 .

الحل // بما ان الهدف تقليل التكاليف اذن :

N / S	Best	worst	Result
S1	4* 0.6	10*0.4	6.4
S2	8*0.6	12*0.4	9.6
S3	5.0.6	12*0.4	7.8
S4	16*0.6	20*0.4	17.6

القرار: تبني الاستراتيجية الاولى لانها تمثل اقل التكاليف وهي 6.4

ثالثاً: معيار لا بلاس (تساوي الاحتمالات) Laplace

يقوم هذا المعيار على أساس الفلسفة التي تفترض انه طالما لايمكن معرفة احتمال حصول كل حالة من حالات الطبيعة فأنه يجب معاملتها بالتساوي من حيث احتمال حدوثها لذا تفترض ان كل الحالات لها نفس الاحتمال بإمكانية الحدوث فأن كان هناك خمسة حالات طبيعة متوقعة فأن احتمال حصول كل منها هو 0.2 ويتم اتخاذ القرار هنا عن طريق جمع القيم الخاصة بكل استراتيجية في ظل حالات الطبيعة المختلفة وقسمتها على عدد حالات الطبيعة ثم نختار اعلى الارقام اذا كان الهدف تعظيم الربح واختيار اقل رقم في حالة تقليل التكاليف .

ويعتبر حل الامثلة لهذا المعيار بنفس الطريقة وهي ايجاد المتوسط الحسابي لكل استراتيجية :

- اذا كانت مصفوفة عائد يتم اختيار اعلى قيمة .
- اذا كانت مصفوفة تكاليف يتم اختيار اقل رقم .

مثال / اذا كان لديك مصفوفة القرار الاتية لاستثمار مبلغ معين وهناك عدة بدائل وظروف خارجية ، م/ تحديد البديل الافضل للاستثمار باستخدام معيار لا بلاس ؟

	N_1	N_2	N_3	N_4
S_1	8	14	10	12
S_2	6	12	16	8
S_3	10	9	11	8
S_4	16	13	15	12

الحل :

	المجموع / العدد	RESULT
S_1	(8+14+10+12)/4	11
S_2	(6+12+16+8)/4	10.5
S_3	(10+9+11+8)/4	9.5
S_4	(16+13+15+12)/4	14

القرار : تبني الاستراتيجية الرابعة حيث تحقق أعلى عائد هو 14 الف دينار .

رابعاً : اختيار اقل ندم (أسف) Savage criterion

هذه الطريقة تساعدنا على اختيار الاخيار الذي يحقق أقل اسف على الفرص الضائعة اي اننا لانريد تضييع الفرص الاستثمارية ولذلك فأننا نغير البيانات في الجدول لتعبر عن اقصى ضياع للفرص وذلك بطرح كل قيمة في العمود من القيمة الاعلى في ذلك العمود (في حالة الارباح) وطرح اقل قيمة في العمود من بقية قيم العمود (في حالة التكاليف)بعد ذلك نضع اعلى اسف (ضياع للفرص) لكل خيار في العمود الاخير ثم نختار اقلها

مثال ١// اعتمد معيار اقل ندم لاختيار البديل الافضل في مصفوفة الارباح الاتية :

	N_1	N_2	N_3
S_1	12	18	15
S_2	17	10	14
S_3	22	16	10
S_4	14	14	14

الحل // بما ان المصفوفة تمثل ارباحاً فأنه تم تحديد أعلى الارقام من كل عمود من الاعمدة وطرح باقي ارقام العمود منه .

	N_1	N_2	N_3	معيار سافاج
S_1	10	0	0	10
S_2	5	8	1	8
S_3	0	2	5	5
S_4	8	4	1	8

القرار: هو تبني الاستراتيجية الثالثة لانها تمثل اقل ضياع للفرص بقيمة 5 الاف

مثال ٢// اعتمد معيار اقل ندم لاختيار البديل الافضل في مصفوفة التكاليف الاتية :

	N_1	N_2	N_3
S_1	12	18	15
S_2	17	10	14
S_3	22	16	10
S_4	14	14	14

بما انها مصفوفة تكاليف فأننا نأخذ اقل قيمة في كل عمود ونطرحها من باقي قيم العمود ، ثم نحدد اعلى رقم في كل استراتيجية والتي تمثل اقل ندم ثم نختار الاستراتيجية المثلى التي تقابل اقل رقم من بين الارقام .

	N_1	N_2	N_3	معيار سافاج
S_1	0	8	5	8
S_2	5	0	4	5
S_3	10	6	0	10
S_4	2	4	4	4

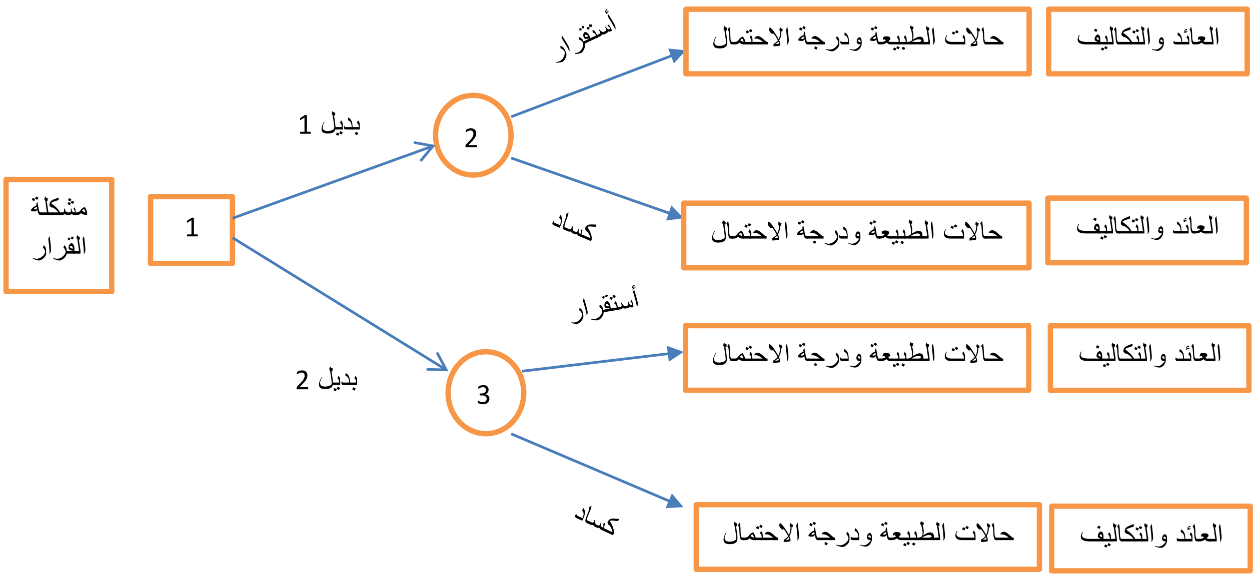
القرار: هو تبني الاستراتيجية الرابعة لأنها تمثل اقل ندم بقيمة 4 آلاف

ثالثاً : اتخاذ القرار في حالة المخاطرة Decision making under risk

في هذه الحالة تكون المعلومات عن حالات الطبيعة هي معلومات احتمالية وفي ظل هذا التوزيع الاحتمالي يمكن لصانع القرار ان يختار البديل الذي يتسق مع المعيار المطبق حيث انه يعلم احتمالات حدوث حالات الطبيعة ولكنة لايعلم اياً منها سوف يحدث ومن اشهر الاساليب في هذا المجال هو اسلوب شجرة القرارات Decision Tree .

- شجرة القرارات Decision Tree

هي تمثيل بياني في شكل شجري متفرع من نقطة رئيسية تسمى جذر الشجرة ويرمز له بمربع □ ويتفرع منه فروع كل فرع يعبر عن حدوث حدث معين ويعبر عن الحدث المعين بدائرة ○ وايضاً يعبر عن القرار بمربع □ والارقام الموجودة على الفروع تعبر عن احتمالات حدوث الاحداث والارقام التي في نهاية الفروع تعبر عن العوائد او التكاليف ، لاحظ ان المربع الذي يمثل جذر الشجرة نضع فيه رقم 1 وبالتسلسل كل فرع يخرج من الجذر يأخذ رقماً يوضع داخل دائرة الحدث المعين ○ الشكل الاتي يوضح ذلك :



شجرة القرارات

تعريف : هي عبارة عن تمثيل او رسم هندسي لعملية اتخاذ القرارات بشكل يسهل معه تحديد مراحل اتخاذ القرار.

استخدام شجرة القرارات

لاتخاذ قرار بشأن المشاكل المعقدة او متعددة المراحل .

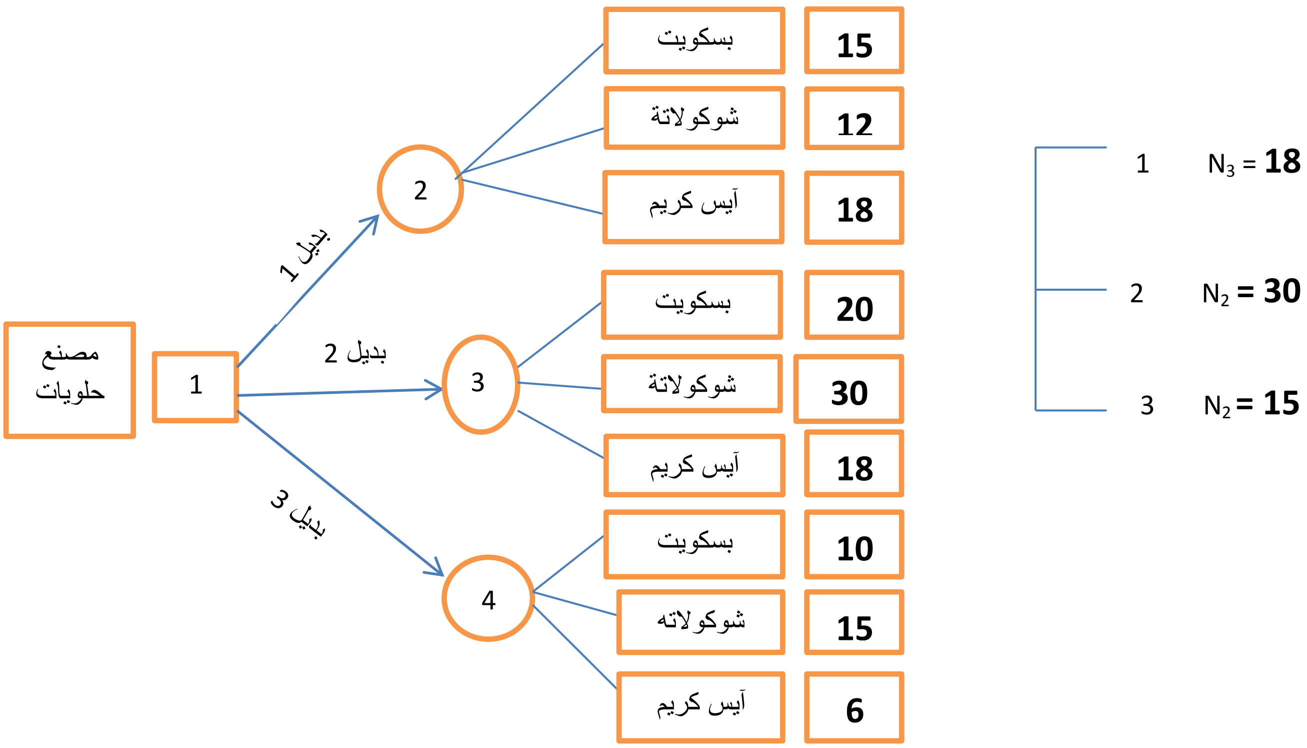
محتويات شكل الشجرة :

١- تحتوي على نقطة قرار بداية القرار
٢- اسهم للبدائل
٣- عقد لتفرع البديل الى حالات .

مثال 1 / يصنع مصنع معين ثلاثة انواع من المنتجات (بسكويت ، شوكولاتة ، ايس كريم) وتشمل ثلاثة حالات من حالات الطبيعة لتوفر ثلاث بدائل .

م/ ارسم شجرة القرارات وحدد اعلى عائد ليحقق اعلى ربح ممكن بالأف الدنانير ؟

	N1	N2	N3
S1	15	12	18
S2	20	30	18
S3	10	15	6

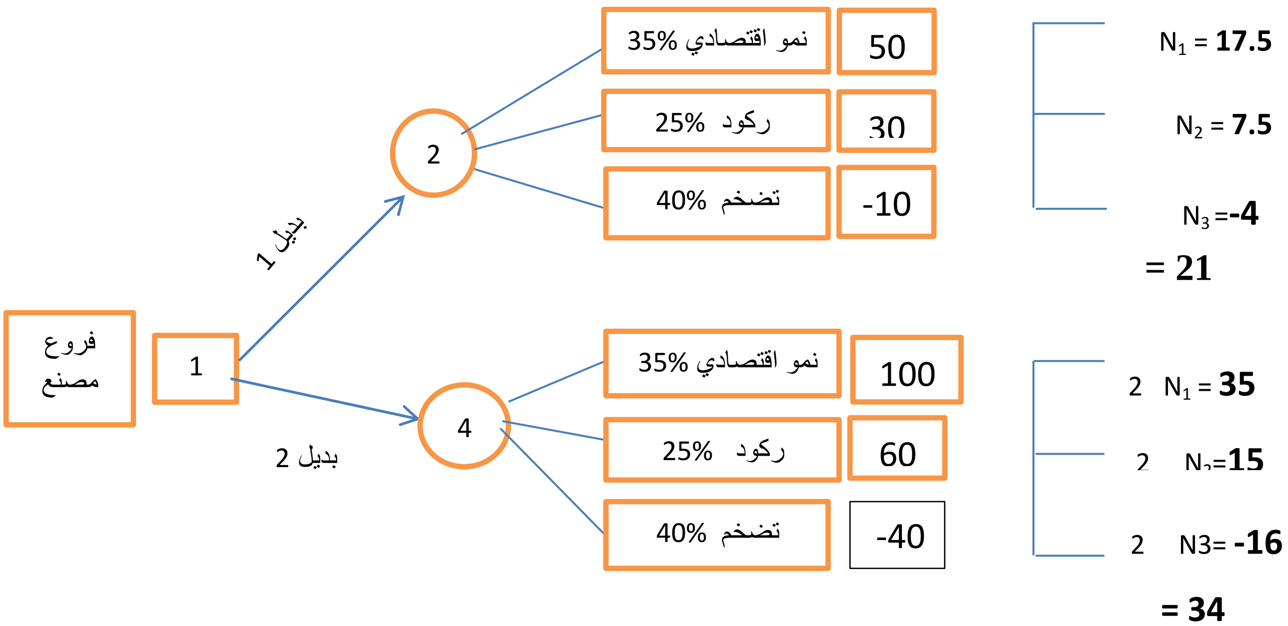


القرار : هو اختيار البديل الثاني ، الحالة الثانية ليحقق اعلى ربح ممكن بمقدار 30الف دينار

مثال 2 / يرغب احد المصنعين فتح فرعين في منطقتين مختلفين في بلاده و هناك تم دراسة الجدوى وخلصت كالاتي :

		N1 نمو اقتصادي	N2 ركود	N3 تضخم
ارباح وخسائر المشروع A	S1	**50**	**30**	**-10**
ارباح وخسائر المشروع B	S2	**100**	**60**	**-40**
	احتمالات الحدوث	**35 %**	**25 %**	**40 %**

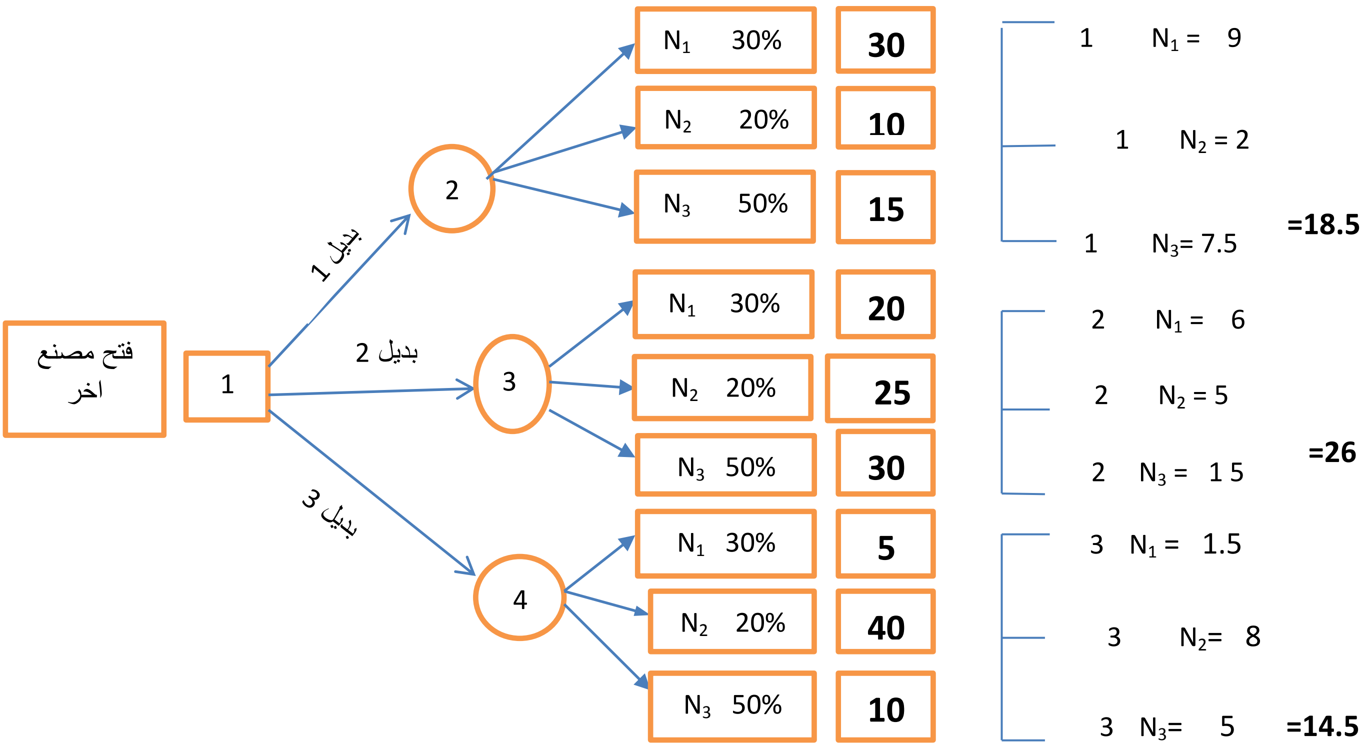
م/ ارسم شجرة القرارات وحدد افضل مشروع معتمداً على تحقيق اعلى ربح ممكن بملايين الدنانير ؟



القرار : هو اختيار البديل الثاني (المشروع الثاني) ليحقق اعلى ربح ممكن بمقدار 34 مليون دينار

مثال 3 / قررت ادارة مصنع معين فتح فرع آخر لهم في مدينة اخرى وتوفرت للمصنع البدائل الاتية ، والمطلوب رسم شجرة القرارات واتخاذ القرار المناسب ؟

	N1	N2	N3
S_1	**30**	**10**	**15**
S_2	**20**	**25**	**30**
S_3	**5**	**40**	**10**
احتمالات الحدوث	**30%**	**20%**	**50%**



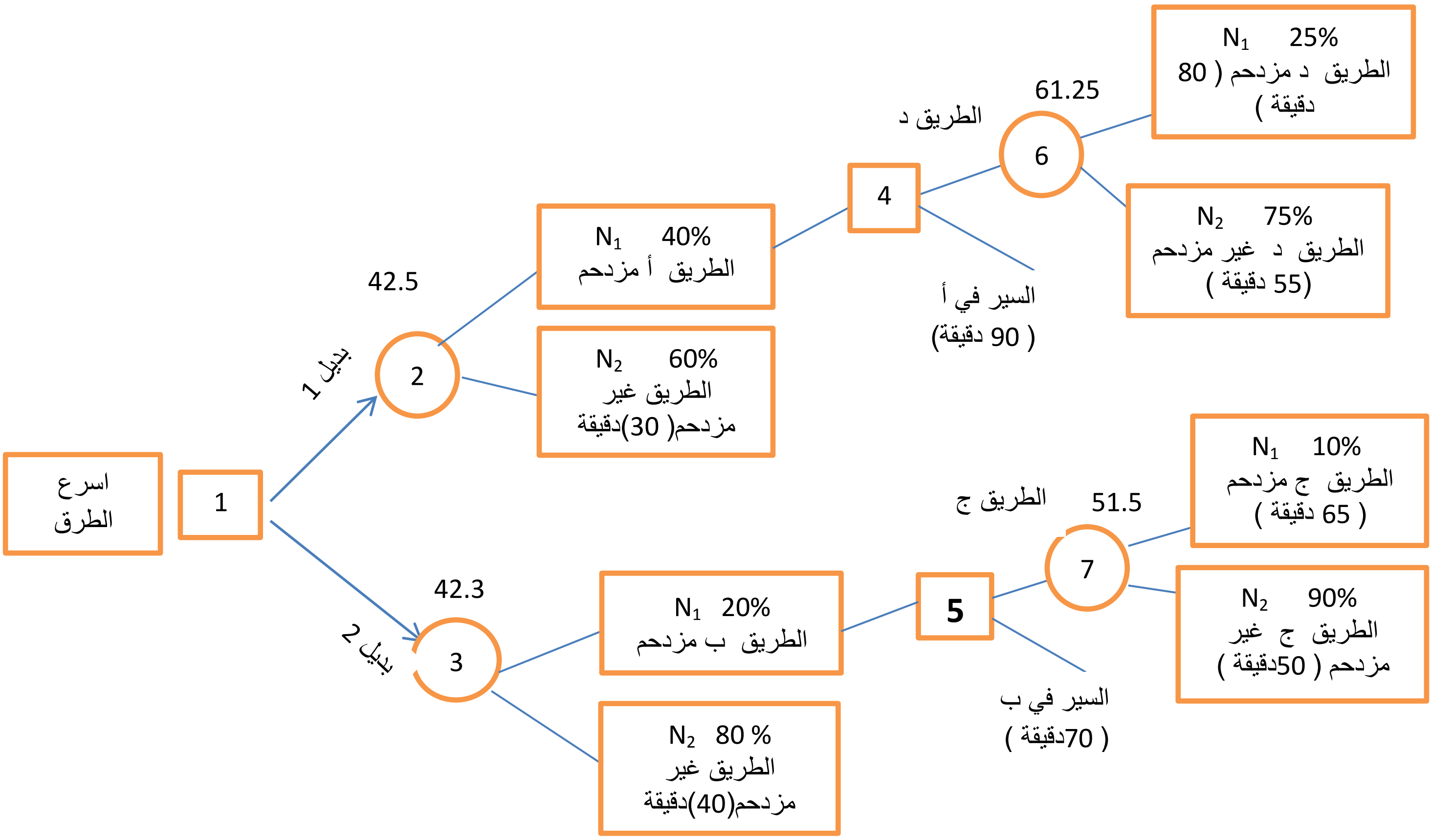
القرار هو اختيار البديل الثاني الذي يحقق اعلى عائد ممكن 26 مليون دينار

مثال /٤ (واجب)

انت بصدد اتخاذ قرار مهم وامامك خيارين ، اما ان تنتج 100 قطعة او تنتج 50 قطعة وفي نفس الوقت فانت تتوقع ان يكون سعر السوق في الفترة القادمة (1000) دينار بنسبة توقع (65%) ولكنك تشك ان يكون السعر (900) دينار بنسبة توقع (20%) ، وربما (800) دينار بنسبة (15%) كيف يمكن ان تتخذ القرار علماً ان تكلفة القطعة هو 875 دينار ؟

مثال /٥

أفترض انك تريد ان تنتقل من نقطة 1 الى نقطة 2 وامامك طريقين احدهما أ والاخر ب وانت متردد بين سلوك هذا الطريق اوذاك فلو سلكت (أ) وكان مزدحماً فتفكر هل تنتقل منه الى الطريق الفرعي (د)واذا سلكت الطريق (ب) وكان مزدحماً هل تنتقل منه الى الطريق الفرعي (ج) وبناء على خبرتك السابقة في هذه الطرق فأنت تعرف كم من الوقت سيستغرق الذهاب عبر كل طريق اذا كان مزدحماً واذا لم يكن مزدحماً فالرحلة عبر(أ ، ب، ج ، د)تستغرق (30 ، 40 ، 50 ، 55) دقيقة اذا لم تكن مزدحمة ، وتستغرق (90 ، 70 ، 65 ، 80) دقيقة اذا كانت مزدحمة وانت تعلم ان احتمالية ازدحام هذه الطرق هي (40% ، 20% ، 10% ، 25%) فكيف يمكن ان تختار الطريق الاسرع مع رسم شجرة القرار؟



لكي نتخذ القرار الصحيح نبدأ بحساب الاوقات من يمين الشجرة

النقطة (6) الوقت المتوقع $0.25*80 + 0.75 *55 = 61.25$

النقطة (7) الوقت المتوقع $0.10 * 65 + 0.90 *50 = 51.5$

النقطة (2) الوقت المتوقع $0.40 * 61.25 +0.60 * 30 = 42.5$

النقطة (3) الوقت المتوقع $0.20 * 51.5 + 0.80 *40 = 42.3$

اذن القرار الصائب هو ان يسلك الطريق (ب) لان الوقت المتوقع للرحلة اقل

*اسلوب القيمة النقدية المتوقعة

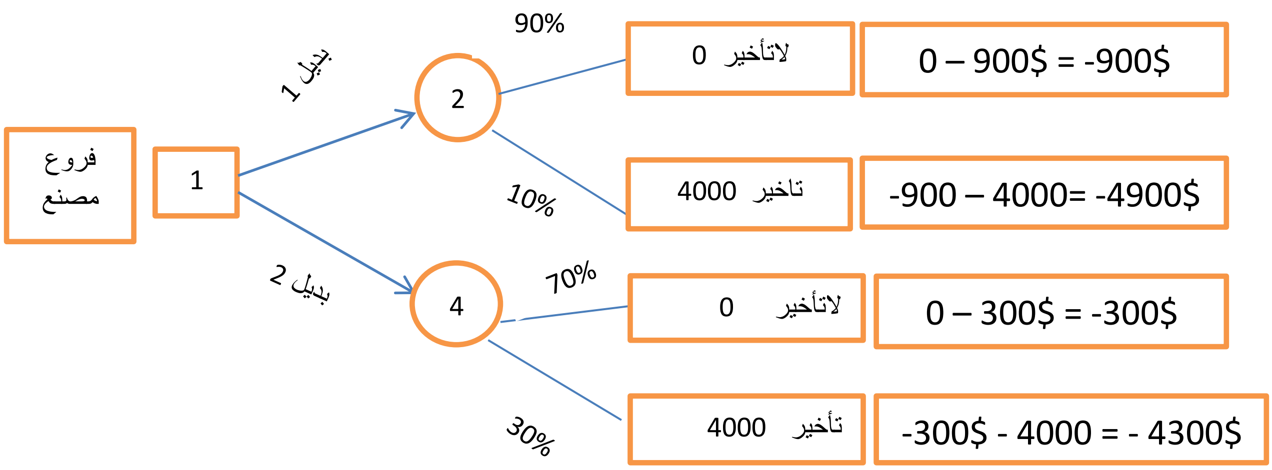
مثال / اذا كان لديك مصفوفة التكاليف التالية فجد القرار الامثل لمتخذ القرار لتقليل التكاليف مستخدماً توقع القيمة النقدية ؟

	N1	N2
S_1	**80**	**60**
S_2	**40**	**90**
S_3	**20**	**70**
الاحتمال	**0.70**	**0.30**

EMV_1= (80 * 0.70) + (60 * 0.30)
= 56 + 18
= 74
EMV_2= (40 * 0.70) + (90 * 0. 30)
= 28 + 27
= 55
EMV_3 = (20 *0.70) + (70 * 0.30)
= 14 + 21
= 35

القرار : هو اختيار البديل الثالث لانه يحقق اقل تكلفة ممكنة .

مثال / لو كنت تود السفر من مدينة أ الى ب لحضور اجتماع عمل مهم وقد يسبب لك عدم الحضور للاجتماع خسارة مقدارها (4000) دولار ويوجد خيارين للسفر
شركة طيران A تكلفة التذكرة فيها هي (900) دولار و (90%) من رحلاتها تصل في الوقت المحدد .
شركة طيران B تكلفة التذكرة فيها هي (300) دولار و (70%) من رحلاتها تصل في الوقت المحدد .
م/ ارسم شجرة القرار وجد القيمة النقدية المتوقعة ؟



نحسب القيمة النقدية المتوقعة

$EMV_1 = (-900 * 0.90) +(-4900 * 0.10)$

$= -1300\$$

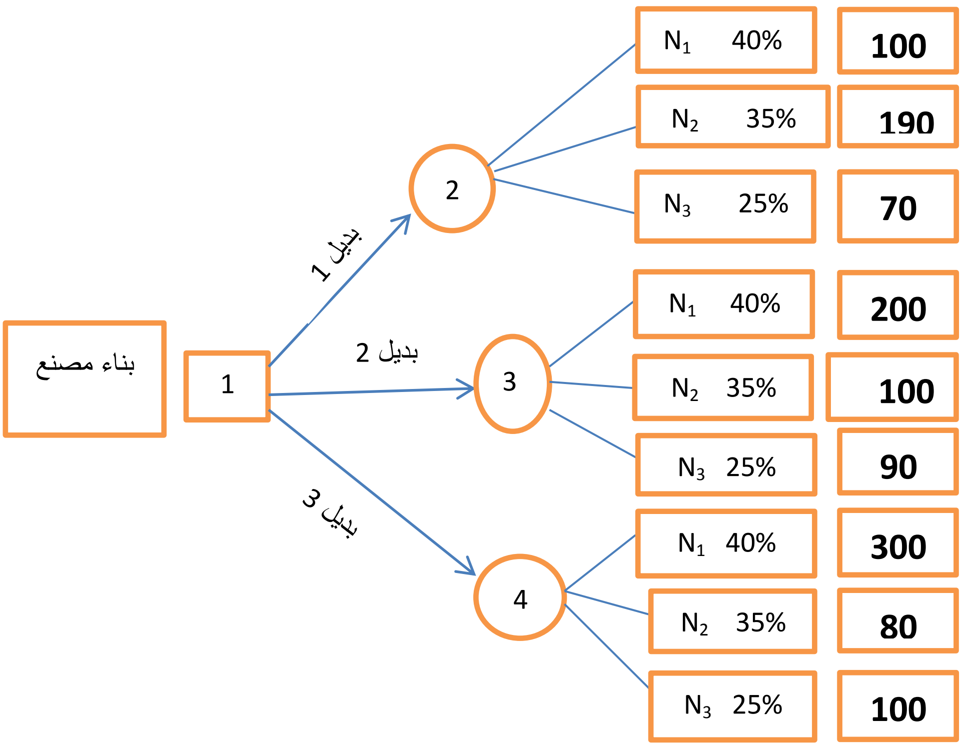
$EMV_2 = (- 300* 0.70) +(-4300 * 0.30)$

$= - 1500 \$$

القرار : هو اختيار البديل الاول وهي شركة الطيران A لأنها الاقل في التكلفة .

مثال / يرغب مدير مصنع في تقييم ثلاثة بدائل للتوسع في نشاطاته الانتاجية وهذه البدائل هي بناء مصنع صغير او متوسط او كبير ويواجه هذا القرار ارتفاع الطلب او ثباته او انخفاضه علماً بان احتمال ارتفاع الطلب هو (40%) وثباته (35%) وانخفاضه (25%) وقد قدر المدير نتائج البدائل مقرونه مع حالات الطبيعة كما في الجدول فما هو القرار الامثل ؟

	N1	N2	N3
S_1	**100**	**190**	**70**
S_2	**200**	**100**	**90**
S_3	**300**	**80**	**100**
احتمالات الحدوث	**40%**	**35%**	**25%**



$EMV1 = (100 * 0.40) + (190 * 0.35) + (70 * 0.25)$

$= 40 + 66.5 + 17.5$

$\mathbf{= 124}$

$EMV2 = (200 * 0.40) + (100 * 0.35) + (90 * 0.25)$

$80 + 35 + 22.5$

$\mathbf{= 137.5}$

$EMV3 = (300 * 0.40) + (80 * 0{,}35) + (100 * 0.25)$

$= 120 + 28 + 25$

$\mathbf{= 173}$

القرار: هو ان ينشأ المصنع الكبير وهو البديل الثالث لانه يحقق اعلى الارباح ضمن حالات الطبيعة الثلاثة

Quantitative techniques الاساليب الكمية

مـــــقدمــــــــــة :

تعريف : احدى الادوات الكمية التي تساعد الادارة في عملية اتخاذ القرار.

وهناك من يرى بأنها عبارة عن استخدام الطرق والاساليب والادوات العلمية لحل المشاكل التي تتعلق بالعمليات الخاصة بأي نظام بغرض تقديم الحل الامثل لهذه المشاكل .

معنى التعظيم // اي ايجاد اعلى قيمة لدالة الهدف (تحديد ربح انتاج مادة معينه)

معنى التقليل // اي ايجاد اقل قيمة لدالة الهدف (تحديد اقل كلفة لنقل مادة معينة)

الفصل الثاني

Linear programming البرمجة الخطية

تعريف : (البرمجة) هي التخطيط الدقيق الواضح لما تنوي عمله مستقبلا .

(الخطية) تعني ان تكون العلاقة الرياضية بين المتغيرات والتي تمثل النموذج الرياضي هي علاقة خطية متجانسة من الدرجة الاولى ، بمعنى ان اي زيادة في احد الاطراف تؤثر بنفس النسبة في زيادة الطرف الآخر .

والبرمجة الخطية هي احد اهم وسائل بحوث العمليات في تحليل مختلف المشاكل ، ولفعاليتها في التحليل فقد اخذت شهره واسعه في المجالات الصناعية والتجارية والاقتصادية ، وتعتمد اساساً على النموذج الرياضي الذي يربط العلاقات بين المتغيرات في النظام والتي تفترض ان تكون علاقة خطية لجميع القيود ولدالة الهدف ومن الدرجة الاولى ويمكن تمثيلها برسم بياني اذا كانت ذات متغيرين اثنين .

مستلزمات تطبيق البرمجة الخطية

- **ان يكون لدينا هدف واضح ومحدد ودقيق (ارباح او خسائر)**
- **ان تكون الموارد المستخدمة محددة (رأسمال ، ساعات عمل ، مواد اولية)**
- **ان يوجد اكثر من بديل لتحقيق الهدف .**
- **ان يمكن التعبير عن المشكلة بنموذج رياضي .**
- **ان تكون العلاقات بين المتغيرات علاقات خطية من الدرجة الاولى .**

الصيغ الرئيسية للنموذج الرياضي في البرمجة الخطية

- **General formulation of the (L.P.) model الصيغة العامة للبرمجة الخطية**
  - **دالة الهدف :تكون اما (تعظيم الربح اوتقليل كلفة) MAX OR MIN**

- **القيود : تكون القيود اما أصغر اويساوي في حالة التعظيم وتكون أكبر او يساوي في حالة التقليل للكلف .**
- **الجانب الايمن : يكون ثوابت اما موجبة او سالبة (R.H.S) .**
- **المتغيرات يجب ان تكون موجبة دائماً وهو شرط عدم السلبية .**

والشكل العام المختصر لها في حالة التعظيم هو :

$$MAX\ (X_o) = \sum C_J X_j$$

Subject to : $\sum a_{ij} x_j \le b_i$

$$x_j \ge 0$$

والشكل المختصر لها في حالة تقليل الكلف هو :

$$MIN\ (X_o) = \sum C_J X_j$$

Subject to **:** $\sum a_{ij} x_j \ge b_i$

$$x_j \ge 0$$

حيث ان :

i = 1,2,,,,,,,,,M

j = 1,2,,,,,,,,N

خطوات بناء النموذج الرياضي

١- تحديد متغيرات القرار في النظام (X_j) عدد المتغيرات الاساسية .

٢- تحديد نوع الهدف تعظيم او تصغير .

٣- وضع الافتراضات المحتملة وتحديد المعالم والثوابت والجانب الايمن والعلاقة بين المتغيرات كمعادلات او متباينات .

٤- تحديد الاوزان والمعاملات والثوابت في القيود .

٥- صياغة النموذج رياضياً وتحديد كامل مكوناته ، دالة الهدف والقيود وشرط اللاسلبية .

Ex/1

معمل نجارة لديه (60) ساعة عمل اسبوعياً و (120) متر مكعب من الخشب وماكنتان a و b ,, يرغب تصنيع مناضد وكراسي ولديه البيانات الاتية :

كمية الخشب	الربح المتوقع	الماكنة b	الماكنة a	المنتوج
7 m^3	5 $	2 ساعة	3 ساعة	منضدة
8 m^3	6 $	4 ساعة	1 ساعة	كرسي
120 m^3		60 ساعة	60 ساعة	المتوفر

م/ كون له نموذج رياضي لتحقيق افضل ربح ممكن ؟

Sol/

نفرض المتغيرات x_1 المناضد المفروض انتاجها

نفرض x_2 الكراسي المفروض انتاجها

X_0 الربح المتوقع

١- دالة الهدف تعظيم الارباح : $MAX\ (X_o) = 5x_1 + 6x_2$

٢- القيود :

$7x_1 + 8x_2 \leq 120$ قيد حجم الاخشاب

$3x_1 + x_2 \leq 60$ قيد ساعات عمل الماكنة a

$2x_1 + 4x_2 \leq 60$ قيد ساعات عمل الماكنة b

$x_1, x_2 \geq 0$ شرط اللا سلبية

Ex/2

اذا كانت لديك البيانات التالية عن مزرعة تزرع ثلاثة محاصيل (x1 ,x2 , x3)

فكان المحصول الاول يحتاج(3) كغم سماد و (4) ساعات عمل و (5) ساعات ري وينتج (1.5) طن ويربح من الطن (750$) والمحصول الثاني يحتاج (2) كغم سماد و(5)ساعات عمل و (6) ساعات ري وينتج (2) طن ويربح من الطن (1200$) ، المحصول الثالث يحتاج (1) كغم سماد و(3)ساعات عمل و (7) ساعات ري وينتج (1) طن ويربح من الطن (600$) وكان لديهم (1000) كغم سماد و (200) ساعة عمل و (5) ايام ري و(120) دونم ارض .

م/ كون نموذج رياضي مناسب لتحقيق الارباح ؟

يمكن تحليل المشكلة حسب الجدول الاتي :

مقدار السماد	ساعات العمل	ساعات الري	الربح للطن	الانتاج المتوقع	حجم الارباح	المساحة المزروعة
3	4	5	750	1.5	(1.5)750	X1
2	5	6	1200	2	(2)1200	X2
1	3	7	600	1	(1)600	X3
1000	200	120				120 دونم

النموذج تعظيم الارباح فيكون كما يلي :

$$MAX\ (X_o) = 1125x_1 + 2400x_2 + 600x_3$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 120$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 1000$$

$$4x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 200$$

$$5x_1 + 6x_2 + 7x_3 \leq 120$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Ex/3

في مصنع لصناعة الاسمدة والمركبات الحيوانية كان المركب المطلوب لغذاء حيواني مكون من ثلاثة انواع اساسية وكل وحدة تتكون من (4) مركبات (كربوهيدرات ، دهون ، بروتين ، فيتامين)، فأذا علمت ان الحيوان يحتاج الى (50) وحدة من الكربوهيدرات ، و(60) وحدة من بروتين ،و(40) وحدة من الدهون ، و(30) وحدة من فيتامين . والمطلوب كون نموذج رياضي لتحقيق اقل كلفة ممكنة ؟

النوع	الاول	الثاني	الثالث	المتوفر
كربوهيدرات	**10**	**7**	**5**	**50**
دهون	**12**	**5**	**3**	**40**
بروتين	**11**	**10**	**9**	**60**
فيتامين	**6**	**4**	**3**	**30**
التكلفة	**150**	**130**	**120**	

الحل / نفرض النوع الاول والثاني والثالث x3 , x2 , x1

دالة الهدف

$$MIN\ (X_o) = 150x_1 + 130x_2 + 120x_3$$

s.to

القيود

$$10x_1 + 7x_2 + 5x_3 \geq 50$$

$$12x_1 + 5x_2 + 3x_3 \geq 40$$

$$11x_1 + 10x_2 + 9x_3 \geq 60$$

$$6x_1 + 4x_2 + 3x_3 \geq 30$$

شرط اللاسلبية

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

- حل النموذج الرياضي بطريقة الرسم البياني :Graphical Method

مواصفات هذه الطريقة

١- لايمكن استخدامها الا للنموذج الذي يكون عدد متغيراته الاساسية اثنان فقط .

٢- لاتكون نتائج حل النموذج دقيقة جدا لاعتمادها على الرسم البياني .

٣- ضرورية جداً لفهم الطريقة الثانية (simplex method)

٤- تعتمد هذه الطريقة على تمثيل القيود بموجب خطوط مستقيمة على ورق بياني وايجاد منطقة حل ممكنة من خلال تقاطع تلك الخطوط والتي تحقق جميع القيود وشرط اللاسلبية .

Ex/1

حل النموذج الرياضي الاتي بطريقة الرسم البياني لايجاد منطقة الحل الامثل ؟

$$Max\,(X_o) = 10x_1 + 120x_2$$

S.TO $\quad 6x_1 + 2x_2 \leq 36 \quad .....(1)$

$\quad 3x_1 + 4x_2 \leq 36 \quad ......(2)$

$x_1 + x_2 \geq 0$ شرط اللاسلبية

١- نمنح القيود ارقاماً القيد الاول (1) والقيد الثاني (2) لغرض الرسم

٢- لكل قيد نجد احداثيات النقاط التي تمثله على الورق وذلك بأفتراض ان قيمة $X_1=0$ لنجد قيمة X_2 ، ثم نفترض $X_2=0$ لنجد قيمة X_1 .

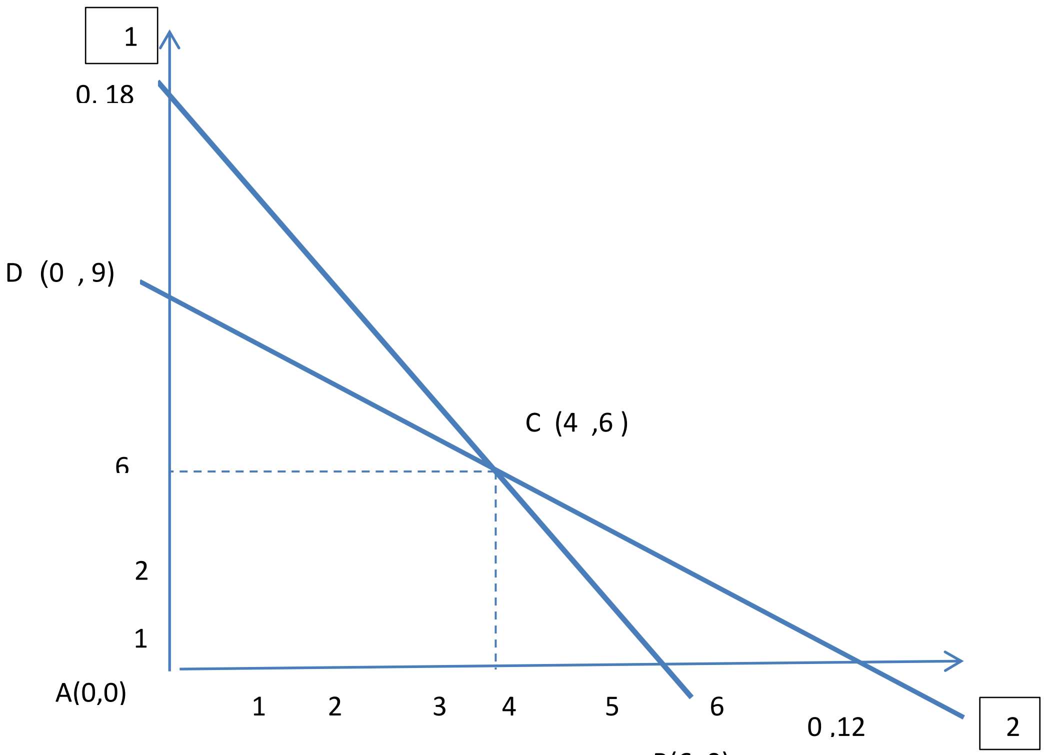
$$6x_1 + 2x_2 \leq 36 \quad , \text{ if } \quad x_1 = 0 \rightarrow x_2 = \frac{36}{2} = 18, (0,18)$$

$$\text{If} \quad x_2 = 0 \rightarrow x_1 = \frac{36}{6} = 6, (6,0)$$

$$3x_1 + 4x_2 \leq 36, \text{ if } \quad x_1 = 0 \rightarrow x_2 = \frac{36}{4} = 9, (0,9)$$

$$\text{If} \quad x_2 = 0 \rightarrow x_1 = \frac{36}{3} = 12, (12,0)$$

لرسم هذه القيود او النقاط على الورق نرسم الاحداثيات ل x2, x1 ونقسم الاحداثيات حسب مدى المتغيرين اللذان حصلنا عليهما .



لإيجاد نقطة C نأخذ المعادلتين الاولى والثانية للقيود ونضرب القيد الاول بـــ (2) حتى نحذف احد المتغيرات ونستخرج قيمة المتغير الاخر يعني حل المعادلتين آنياً وكما يلي :

$$6x_1 + 2x_2 = 36 \quad .....(1) \qquad *2$$

$$\underline{3x_1 + 4x_2 = 36 \quad ......(2)}$$

$$12x_1 + 4x_2 = 72$$

$$\underline{3x_1 + 4x_2 = 36} \qquad \text{بالطرح}$$

$$9x_1 = 36 \Rightarrow x_1 = \frac{36}{9} = 4$$

ثم نعوض قيمة X_1 بأي معادلة الاولى او الثانية لنحصل على قيمة X_2 :

لو عوضنا في المعادلة الثانية نحصل :

$$3(4) + 4(x_2) = 36$$

$$4x_2 = 36 - 12 \Rightarrow x_2 = \frac{24}{4} = 6$$

اذن نقطة (4 ,6)c

الان لدينا جميع احداثيات النقاط نعوض عن قيمة احداثيات النقاط في دالة الهدف اي نجد قيمة دالة الهدف في كل نقطة من نقاط منطقة الحل الامثل والتي تكون قريبة من نقطة الاصل .

$$A(0,0) : Max\,(x_o) = 10(0) + 120(0) = 0$$

$$B(6,0) : Max\,(x_o) = 10(6) + 120(0) = 60$$

$$C(4,6) : Max\,(x_o) = 10(4) + 120(6) = 760 \; *$$

$$D(0,9) : Max\,(x_o) = 10(0) + 12(9) = 108$$

وحيث ان دالة الهدف تعظيم الربح فأننا نختار النقطة التي اعطتنا اعلى ربح وهي (6 , 4)c ونعوضها في القيدين فيجب ان تحقق تباين القيدين :

$$6(4) + 2(6) = 36$$

$$3(4) + 4(6) = 36$$

اي ان القرار يكون انتاج (4)وحدات من المنتج الاول و(6) وحدات من المنتج الثاني ليحقق ربح مقداره (112) .

Ex/2

حل النموذج الرياضي الاتي بطريقة الرسم البياني لايجاد منطقة الحل الامثل ؟

$$Min(x_o) = 10x_1 + 12x_2$$

$$20x_1 + 10x_2 \geq 100$$

$$10x_1 + 10x_2 \geq 80$$

$$10x_2 \geq 40$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

- الحل// نحول المتباينات الى معادلات ونجد قيم المتغيرين :

القيد الاول :

$$20x_1 + 10x_2 = 100$$

if $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{100}{10} = 10, (0,10)$

If $x_2 = 0 \Rightarrow_1 x_1 = \frac{100}{20} = 5 \quad , (5,0)$

القيد الثاني :

$$10x_1 + 10x_2 = 80$$

$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{80}{10} = 8, (0,8)$

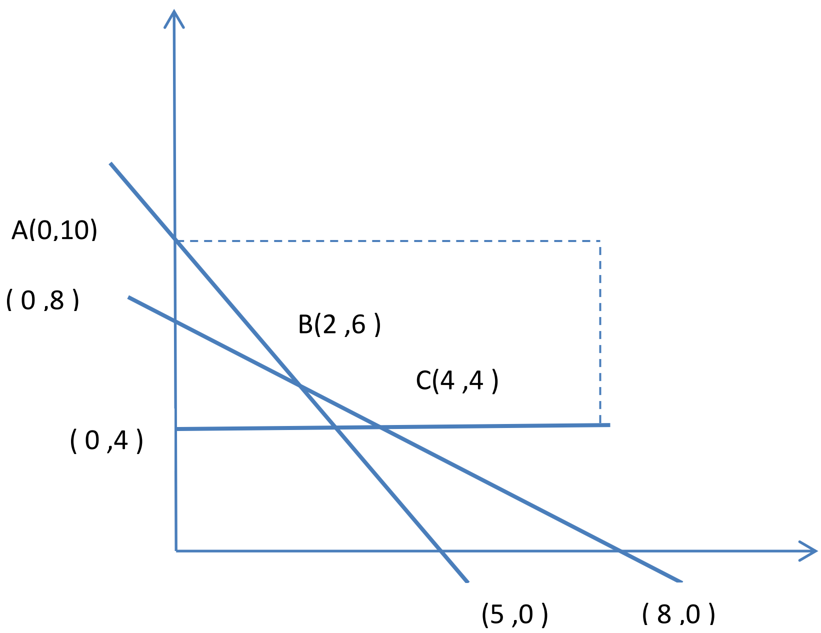
$x_2 = 0 \Rightarrow_1 x_1 = \frac{80}{10} = 8, (8,0)$

القيد الثالث:

$$10x_2 = 40$$

$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{40}{10} = 4, (0,4)$

$x_2 = 0 \Rightarrow_1 x_1 = \infty, (\infty, 0)$



- نستخرج احداثيات نقطة B بأخذ معادلة القيدين الاول والثاني ونحلها آنياً :

$$20x_1 + 10x_2 = 100$$

$$\underline{10x_1 + 10x_2 = 80} \qquad \text{بالطرح}$$

$$10x_1 = 20 \Rightarrow x_1 = 2$$

نعوض قيمة X1 في المعادلة الاولى :

$20(2) + 10x_2 = 100 \Rightarrow 10x_2 = 60 \Rightarrow x_2 = 6$,, B(2,6)

- نستخرج احداثيات نقطة C بأخذ معادلة القيدين الثاني والثالث وحلها آنياً :

$$10x_1 + 10x_2 = 80$$
$$\underline{10x_2 = 40}$$

$$10x_1 = 40 \Rightarrow x_1 = 4$$

$$x_2 = 4$$

- **اختبار منطقة الحلول الممكنة في دالة الهدف :**

$$A(0,10): Min(x_o) = 10(0) + 12(10) = 120$$

$$B(2,6): Min(x_o) = 10(2) + 12(6) = 92$$

$$C(4,4): Min(x_o) = 10(4) + 12(4) = 88$$

القرار : هو انتاج (4) وحدات من المنتج الاول و (4) وحدات من المنتج الثاني لكي يحقق اقل تكلفة ممكنة بمقدار 88 .

ملاحظات :

١- اذا كان السؤال تعظيم ربح فأن منطقة الحل الامثل تكون قريبة من نقطة الاصل واذا كان السؤال تقليل كلف تكون منطقة الحل الامثل بعيدة عن نقطة الاصل .
٢- من شرط اللاسلبية يجب ان يقع الرسم في الربع الاول الموجب من التخطيط البياني .
٣- عادة تكون منطقة الحل الامثل على شكل مضلع محدب ولا يمر خلال المنطقة اي مستقيم

EX/3

مصنع ينتج منتجين(X_1 , X_2) كون نموذج رياضي لتعظيم الربح ثم حل النموذج بالرسم البياني ؟

	كرسي X_1	مكتب X_2	الطاقة القصوى
تقطيع الخشب	2	4	26
تجميع الخشب	5	3	30
ربح الوحدة	40 $	60 $	

SOL/

$$Max(X_o) = 40x_1 + 60x_2$$

s.to
$$2x_1 + 4x_2 \le 26$$
$$5x_1 + 3x_2 \le 30$$
$$x_1 + x_2 \ge 0$$

نستخرج احداثيات النقاط :

$$2x_1 + 4x_2 = 26$$

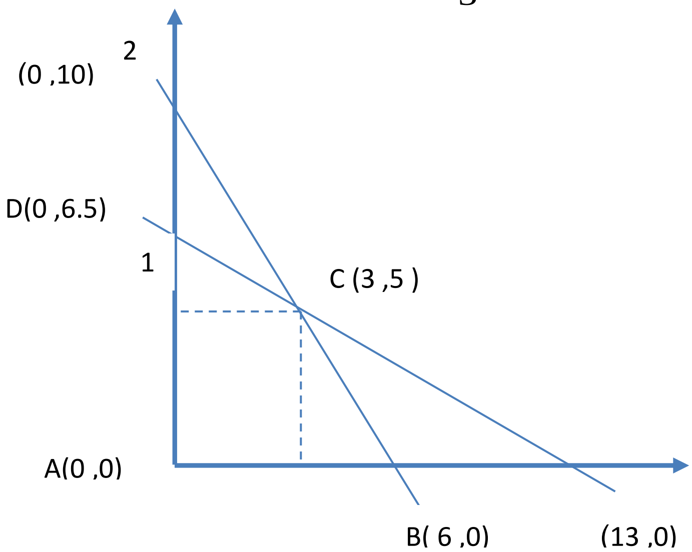
If $x_1 = 0 \Rightarrow 4x_2 = 26 \Rightarrow x_2 = \frac{26}{4} = 6.5, (0, 6.5)$

If $x_2 = 0 \Rightarrow 2x_1 = 26 \Rightarrow x_1 = \frac{26}{2} = 13, (13, 0)$

$$5x_1 + 3x_2 = 30$$

If $x_1 = 0 \Rightarrow 3x_2 = 30 \Rightarrow x_2 = \frac{30}{3} = 10, (0, 10)$

If $x_2 = 0 \Rightarrow 5x_1 = 30 \Rightarrow x_1 = \frac{30}{5} = 6, (6, 0)$



لايجاد احداثيات نقطة C(3 ,5)

$$5*(2x_1 + 4x_2 = 26)$$
$$2*(5x_1 + 3x_2 = 30)$$

$$10x_1 + 20x_2 = 130$$

$$10x_1 + 6x_2 = 60$$ بالطرح

$$14x_2 = 70 \Rightarrow x_2 = 5$$

$$2x_1 + 4(5) = 26 \Rightarrow 2x_1 = 6 \Rightarrow x_1 = 3$$

نعوض جميع نقاط منطقة الحل الامثل في دالة الهدف :

$$A(0,0) : Max\ (x_o) = 40(0) + 60(0) = 0$$
$$B(6,0) : Max\ (x_o) = 40(6) + 60(0) = 240$$
$$C(3,5) : Max\ (x_o) = 40(3) + 60(5) = 420*$$
$$D(0,6.5) : Max\ (x_o) = 40(0) + 60(6.5) = 390$$

اذن النقطة C تحقق اعلى ربح نعوض في القيود يجب ان تحققها :

$$2(3) + 4(5) = 26$$
$$5(3) + 3(5) = 30$$

تفسير ذلك انه يجب ان ينتج (3) وحدات من (X_1) و (5) وحدات من (X_2) ليحقق ربح مقدارة 420 $

EX/4

حل النموذج الرياضي التالي بطريقة الرسم البياني لتقليل التكاليف ؟

$$Min(x_o) = 4x_1 + 2x_2$$

S.TO
$$3x_1 + 5x_2 \geq 15$$
$$6x_1 + 4x_2 \leq 24$$
$$x_1 \geq 2$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

القيد الاول $3x_1 + 5x_2 = 15$

If $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{15}{5} \Rightarrow x_2 = 3, (0,3)$

If $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{15}{3} \Rightarrow x_1 = 5, (5,0)$

القيد الثاني $6x_1 + 4x_2 = 24$

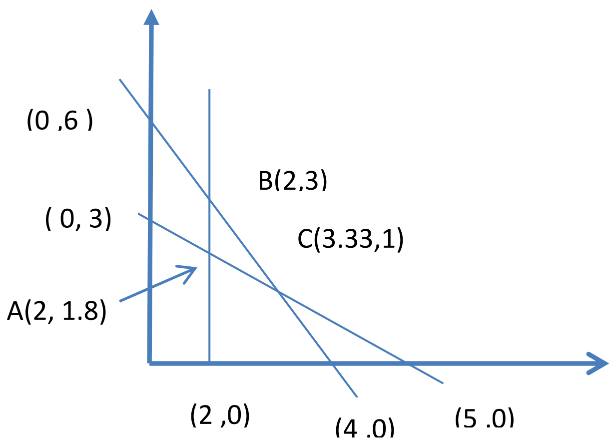
If $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{24}{4} \Rightarrow x_2 = 6, (0,6)$

If $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{24}{6} \Rightarrow x_1 = 4, (4,0)$

القيد الثالث $x_1 = 2$

If $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = \infty, (0, \infty)$

If $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2, (2,0)$



نستخرج احداثيات النقاط (A ,B ,C) :

النقطة A(2 , 1.8) :

$$3x_1 + 5x_2 = 15$$
$$3*(x_1 = 2)$$
$$3x_1 + 5x_2 = 15$$
$$3x_1 = 6$$

بالطرح

$5x_2 = 9 \Rightarrow x_2 = \frac{9}{5} = 1.8$, (2, 1.8)

النقطة (1 , 3.33) C:

$$2*(3x_1+5x_2=15)$$
$$6x_1+4x_2=24$$

$$6x_1+10x_2=30$$
$$6x_1+4x_2=24$$

$$6x_2=6\Rightarrow x_2=1$$

$$3x_1+5(1)=15\Rightarrow x_1=\frac{10}{3}=3.33$$

النقطة (2, 3) B

$$6x_1+4x_2=24$$
$$6*(x_1=2)$$

$$6x_1+4x_2=24$$
$$6x_1=12$$

$$4x_2=12\Rightarrow x_2=3$$

نعوض النقاط في دالة الهدف :

$$A(2,1.8): Min(x_o)=4(2)+2(1.8)=11.6$$
$$B(2,3): Min(x_o)=4(2)+2(3)=14$$
$$C(3.33,1): Min(x_o)=4(3.33)+2(1)=15.32$$

وبما ان دالة الهدف هي تقليل تكاليف فتكون نقطة A هي الحل الامثل اي يجب انتاج (2) من المنتج X1 و (1.8) من المنتج X2 لكي يحقق اقل تكلفة وهي 11.6

وعند تعويضها في القيود يجب ان تحققها :

$$3(2)+5(1.8)=15$$
$$6(2)+4(1.8)=19.2$$
$$2=2$$

ثانياً : حل النموذج الرياضي بطريقة السمبلكس في البرمجة الخطية
Simplex Method

تستخدم هذه الطريقة عندما يكون عدد المتغيرات اثنين او أكثر وتشترط هذه الطريقة ان تكون جميع القيود من نوع اقل او يساوي والطرف الايمن موجب .

خطوات الحل /

١- نحول صيغة السؤال الى الصيغة القياسية ونضيف متغيرات وهمية لها (si)
٢- نصفر دالة الهدف ونضيف المتغيرات الوهمية (si)
٣- نكون جدول اولي لدالة الهدف والقيود .
٤- نستخرج المتغير الداخل والمتغير الخارج .
٥- نعين العنصر المشترك

EX/1

حل النموذج التالي بطريقة السمبلكس لتعظيم الارباح؟

$$Max\,(z) = 30x_1 + 18x_2$$

s.to
$$x_1 + 2x_2 \le 200$$
$$3x_1 + 2x_2 \le 300$$
$$x_1 \le 150$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

الخطوة الاولى :
نصفر دالة الهدف ونضيف المتغيرات المهملة (S_i) الى معادلة دالة الهدف بمعاملات صفرية .

الخطوة االثانية :
نحول قيود المشكلة من الصيغة العامة الى الصيغة القياسية وعملية التحويل تتطلب اضافة متغير راكد اومهمل (s_i) ، مع اكمال شرط اللاسلبية بأضافة المتغيرات المهملة للقيد وان يكون اكبر من الصفر

$$Max\,(z) - 30x_1 - 18x_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 = 0$$
$$x_1 + 2x_2 + 1S_1 + 0S_2 + 0S_3 = 200$$
$$3x_1 + 2x_2 + 0S_1 + 1S_2 + 0S_3 = 300$$
$$x_1 + 0S_1 + 0S_2 + 1S_3 = 150$$
$$x_1, x_2, S_1 + S_2 + S_3 \ge 0$$

الخطوة الثالثة :
نقوم بأعداد جدول الحل الاول (الابتدائي) والذي يتكون من المتغيرات الاساسية وغير الاساسية في معادلة دالة الهدف .
ملاحظات على اعداد الجدول :

- **المتغير الاساسي هو المتغير الذي يكون معمله صفر في معادلة دالة الهدف اي (S1 , S2 , S3)**
- **ان وضع Z في عمود المتغيرات الاساسية لايعني انها متغير اساسي انها فقط تساعد في تحديد المتغير الداخل ولتحديد ما اذا كنا حصلنا على الحل الامثل .**

- **ان القيم الموجودة في جدول الحل الابتدائي تمثل معاملات المتغيرات في معادلة دالة الهدف والقيود ؟**
- **القيم التي تقابل S1 هي معاملات المتغيرات في القيد الاول .**
اما القيم التي تقابل المتغير S2 فهي معاملات المتغيرات في القيد الثاني وهكذا .

- اعداد جدول الحل الابتدائي :

B.V	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R.H.S
Z	1	−30	−18	0	0	0	0
S_1	0	1	2	1	0	0	200
S_2	0	3	2	0	1	0	300
S_3	0	1	0	0	0	1	150

الخطوة الرابعة :
- **تحديد المتغير الداخل وهو المتغير الذي يكون معاملة اكبر قيمه سالبة في داله الهدف في حالة دالة الهدف تعظيم ارباح واكبر قيمة موجبة في حالة دالة الهدف تقليل كلف وهنا المتغير الداخل هو (X1) ويطلق على العمود الذي يضم المتغير الداخل(بالعمود المحوري) .**
- **تحديد المتغير الخارج وهو الذي يمثل اقل قيمة موجبة ناتجة عن حاصل قسمة قيم (R.H.S) على قيم العمود المحوري وتهمل اي قيمة سالبة او صفرية ويطلق على الصف الذي يضم المتغير الخارج (الصف المحوري) . ويتقاطع العمود مع الصف عند قيمة تسمى القيمة المحورية . اذن حاصل قسمة قيم الجانب الايمن على قيم العمود المحوري تكون :**

200/1 =200
300/3= 100
150/1 =150

اذن المتغير S2 هو المتغير الخارج لانه يمثل اقل قيمة موجبة (100) ثم نبدأ بايجاد القيم الجديدة لمعاملات المتغيرات

- **ايجاد قيم المتغير الداخل (X1) وذلك عن طريق قسمة كل قيمة من قيم الصف المحوري على القيمة المحورية ويسمى الناتج ب (صف المفتاح)**
اذن قيم (X1) تكون :

X1 : (0/3 3/3 2/3 0/3 1/3 0/3 300/3)
0 1 2/3 0 1/3 0 100

- نكتب القيم الجديدة في جدول الحل الثاني
- **ايجاد قيم (Z) الجديدة وذلك بأن نضرب القيمة المقابلة ل (Z) في العمود المحوري * صف المفتاح تنتج (Z) الاولية ثم نطرحها من (Z) القديمة**

Z اولية -30 (0 1 2/3 0 1/3 0 100)
0 -30 -20 0 -10 0 -3000

Z قديمة 1 -30 -18 0 0 0 0
-
Z اولية 0 -30 -20 0 -10 0 -3000

Z جديده 1 0 2 0 10 0 3000

- كذلك ايجاد قيم معاملات المتغيرات الاخرى S1 , S3
- ايجاد قيم S1 الاولية بضرب العنصر المقابل ل S1 في العمود المحوري وهو (1) * صف المفتاح ثم نطرح هذا الصف من S1 القديمة كالاتي .

S1 الاولية 1 (0 1 2/3 0 1/3 0 100)

(0 1 2/3 0 1/3 0 100)

S1 القديمة	0	1	2	1	0	0	200
-							
S1 الاولية	0	1	2/3	0	1/3	0	100
S1 جديده	**0**	**0**	**4/3**	**1**	**-1/3**	**0**	**100**

- **نستخرج قيم معاملات S3 الاولية بنفس الطريقة أعلاه بضرب العنصر المقابل ل S3 وهو (1) في الجدول الاول في العمود المحوري * صف المفتاح ثم نطرح هذا الصف من S3 القديمة :**

S3 الاولية 1 (0 1 2/3 0 1/3 0 100)

(0 1 2/3 0 1/3 0 100)

S_3 القديمة	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**150**
-							
S_3 الاولية	**0**	**1**	**-2/3**	**0**	**1/3**	**0**	**100**
S_3 الجديدة	**0**	**0**	**2/3**	**0**	**-1/3**	**0**	**50**

ثم نكون جدول الحل الثاني بنقل كل من (Z , S1 , S3) الجديدة للجدول التالي :

B.V	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R.H.S
Z	1	0	2	0	10	0	3000
S_1	0	0	4/3	1	−1/3	0	100
X_2	0	1	2/3	0	1/3	0	100
S_3	0	0	−2/3	0	−1/3	1	50

وهنا ننظر الى صف Z في الجدول اذا كانت جميع القيم المقابلة صفر او قيم موجبة نكون قد توصلنا الى الحل الامثل وبما ان القيم هنا كلها موجبة وصفر اذن الجدول الثاني هو جدول الحل الامثل ونقول القرار هو انتاج (100) وحدة من X1 و (0) وحده من X2 لتحقق ربحاً مقداره (3000 $) .

وللتأكد من صحة الحل اعلاه نعوض عن قيمة X1 , X2 في دالة الهدف فيجب ان تحققها :

Max z = 30 (100) +18 (0)

= 3000

Ex /2

حل النموذج الرياضي التالي بطريقة السمبلكس لتعظيم الربح ؟

$$Max(z) = 10x_1 + 8x_2$$

s.to $2x_1 + 4x_2 \le 36$

$4x_1 + 2x_2 \le 48$

$x_1, x_2 \ge 0$

Sol/

١- نصفر دالة الهدف

$$Max\,(z) = 10x_1 + 8x_2 + S_1 + S_2$$
$$Max\,(z) - 10x_1 - 8x_2 + S_1 + S_2 = 0$$

٢- نحول القيود الى الصيغة القياسية

$$2x_1 + 4x_2 + S_1 + 0S_2 = 36$$
$$4x_1 + 2x_2 + 0S_1 + S_2 = 48$$
$$x_1, x_2, S_1, S_2 \geq 0$$

٣- نكون الجدول الاولي للحل :

	Z	X1	X2	S1	S2	R.H.S
Z	1	−10	−8	0	0	0
S1	0	2	4	1	0	36
S2	0	4	2	0	1	48

٤- نحدد المتغير الداخل والمتغير الخارج .

- المتغير الداخل هو المتغير الذي يقابل اكبرقيمة سالبة في دالة الهدف اذا كان الدالة MAX واكبر قيمة موجبة اذا كانت الدالة للهدف MIN (ويسمى العمود المحوري)
- المتغير الخارج ونحصل عليه من قسمة الجانب الايمن على معاملات المتغير الداخلي (العمود المحوري) وناخذ اقل قيمة موجبة ويسمى(الصف المحوري) .
- تقاطع العمود مع الصف عند قيمة تسمى القيمة المحورية ومنها نستخرج صف المفتاح .

- نبدأ الحل بأستخراج صف المفتاح من جدول الحل الاول :

X_1	$\frac{0}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{0}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{48}{4}$
صف المفتاح	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	12

Z الأولية $-10 \quad (0 \quad 1 \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad \frac{1}{4} \quad 12)$

Z القديمة	1	−10	−8	0	0	0
− Z الاوليه	0	−10	$\frac{-10}{2}$	0	$\frac{-10}{4}$	−120
Z الجديدة	1	0	−3	0	$\frac{10}{4}$	120

S_1 الأولية $2 \quad (0 \quad 1 \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad \frac{1}{4} \quad 12)$

S القديمة	0	2	4	1	0	36
- S_1 الاوليه	0	2	1	0	$\frac{1}{2}$	24
S1 الجديدة	0	0	3	1	$\frac{-1}{2}$	12

B.V	Z	X1	X2	S1	S2	R.H.S
Z	1	0	−3	0	10/4	120
S1	0	0	3	1	−1/2	12
X_1	0	1	1/2	0	1/4	12

ملاحظة : نحصل على الحل الامثل اذا كانت جميع قيم دالة الهدف موجبة اوصفر في حالة (MAX) وهنا داله الهدف فيها قيمه سالبه اذن نكمل الحل بأعادة الخطوات السابقة ولكن المتغير الداخل هو (X_2) والمتغير الخارج هو (S_1)

X2	0/3	0/3	3/3	1/3	(−1/2)/3	12/3
صف المفتاح	0	0	1	1/3	−1/6	4

X1 الأولية 1/2	(0	0	1	1/3	−1/6	4)
X1 القديمة	0	1	1/2	0	1/4	12
− X1 الأولية	0	0	1/2	1/6	−1/12	2
X1 الجديدة	0	1	0	-1/6	4/12	10

Z الاوليه	−3(0	0	1	1/3	−1/6	4)
	0	0	−3	−1	1/2	−12

Z القديمة	1	0	−3	0	10/4	120
− Z الاولية	0	0	−3	−1	1/2	−12
Z الجديدة	1	0	0	1	2	132

جدول الحل الثالث :

B.V	Z	X1	X2	S1	S2	R.H.S
Z	1	0	0	1	2	132
X_2	0	0	1	1/3	−1/6	4
X_1	0	1	0	−1/6	4/12	10

هنا توصلنا للحل الامثل لان جميع قيم دالة الهدف صفر او موجبه ويكون القرار هو انتاج (10) وحدات من x_1 و (4) وحدات من x_2 وبزيادة ارباح مقدارها ($132\$$)

Ex/3

حل النموذج الرياضي الاتي بطريقة السمبلكس لتقليل الكلفة ؟

$$Min(z) = -5x_1 - 3x_2 + 2x_3$$

s.to
$$x_1 + x_2 + x_3 \le 5$$
$$x_1 - 2x_2 - 2x_3 \le 4$$
$$3x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 15$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

نحول القيود الى الصيغة القياسية ونصفر دالة الهدف ونوازن النموذج :

$$z + 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 = 0$$
$$0Z + X_1 + X_2 + X_3 + 1S_1 + 0S_2 + 0S_3 = 5$$
$$0Z + X_1 - 2X_2 - 2X_3 + 0S_1 + 1S_2 + 0S_3 = 4$$
$$0Z + 3X_1 + 3X_2 + 2X_3 + 0S_1 + 0S_2 + 1S_3 = 15$$
$$X_1, X_2, X_3, S_1, S_2, S_3 \ge 0$$

نكون جدول الحل الاول وبما ان دالة الهدف تقليل فنأخذ المتغير الداخل الذي معامله اكبر قيمة موجبة

B.V	Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	R.H.S	
Z	1	5	3	−2	0	0	0	0	
S_1	0	1	1	1	1	0	0	5	5/ 1 = 5
S_2	0	1	−2	−2	0	1	0	4	4/1 = 4
S_3	0	3	3	2	0	0	1	15	15/3 =5

صف المفتاح X_1 0 1 −2 −2 0 1 0 4

Z الاولية	5(0	1	−2	−2	0	1	0	4)
	0	5	−10	−10	0	5	0	20

Z القديمة	1	5	3	−2	0	0	0	0
− Z الاولية	0	5	−10	−10	0	5	0	20
Z الجديدة	1	0	13	8	0	-5	0	-20

S_1 الاولية	1 (0	1	−2	−2	0	1	0	4)

S_1 القديمة	0	1	1	1	1	0	0	5
− S_1 الاولية	0	1	−2	−2	0	1	0	4
S_1 الجديدة	0	0	3	3	1	-1	0	1

S_3 الاولية	3 (0	1	−2	−2	0	1	0	4)
	0	3	−6	−6	0	3	0	12

S_3 القديمة	0	3	3	2	0	0	1	15
− S_3 الاولية	0	3	−6	−6	0	3	0	12
S_3 الجديدة	0	0	9	8	0	-3	1	3

B.V	Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	R.H.S	
Z	1	0	13	8	0	−5	0	−20	
S_1	0	0	3	3	1	−1	0	1	1/3
X_1	0	1	−2	−2	0	1	0	4	
S_3	0	0	9	8	0	−3	1	3	3/9 =1/3

جدول الحل الثاني

نتوصل الى الحل الامثل اذا كانت قيم دالة الهدف صفر او قيم سالبة وبما ان الجدول اعلاه يحتوي على قيم موجبة اذن نكمل الحل فيكون المتغير الداخل هو (X_2) والمتغير الخارج هو (S_1).

صف المفتاح X_2	0/3	0/3	3/3	3/3	1/3	−1/3	0	1/3

Z الاولية 13(0 0 1 1 1/3 −1/3 0 1/3)

Z القديمة 1 0 13 8 0 -5 0 −20

− Z الاولية 0 0 13 13 13/3 −13/3 0 13/3

Z الجديدة 1 0 0 -5 -13/3 -2/3 0 -73/3

X_1 الاولية −2 (0 0 1 1 1/3 −1/3 0 1/3)

0 0 −2 −2 −2/3 2/3 0 −2/3

X1 القديمة 0 1 −2 −2 0 1 0 4

− X1 الاولية 0 0 −2 −2 −2/3 2/3 0 −2/3

X1 الجديدة 0 1 0 0 2/3 1/3 0 14/3

S_3 الاولية 9 (0 0 1 1 1/3 −1/3 0 1/3)

0 0 9 9 3 −3 0 3

S_3 القديمة 0 0 9 8 0 −3 1 3

− S_3 الاولية 0 0 9 9 3 −3 0 3

S_3 الجديدة 0 0 0 -1 -3 0 1 0

جدول الحل الثالث :

B.V	Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	R.H.S
Z	1	0	0	−5	−13/3	−2/3	0	−73/3
X_2	0	0	1	1	1/3	−1/3	0	1/3
X_1	0	1	0	0	2/3	1/3	0	14/3
S_3	0	0	0	−1	−3	0	1	0

بما ان قيم دالة الهدف قيم سالبه وأصفار اذن توصلنا للحل الامثل وهو انتاج (14/3) من X1 و (1/3) من X2 لغرض تقليل الكلفة بمقدار (−73/3$)

Ex/4

$$Max\,(z) = 6x_1 + 5x_2$$

s.to $\quad x_1 + x_2 \le 5$

$\quad 3x_1 + 2x_2 \le 12$

$\quad x_1, x_2 \ge 0$

١- نوازن النموذج ونصفر دالة الهدف

$$Max\,(z) - 6x_1 - 5x_2 + 0S_1 + 0S_2 = 0$$

$$0Z + x_1 + x_2 + 1S_1 + 0S_2 = 5$$

$$0Z + 3x_1 + 2x_2 + 0S_1 + 1S_2 = 12$$

$$x_1, x_2, S_1 + S_2 \ge 0$$

٢- نكون جدول الحل الاول :

B.V	Z	X1	X2	S1	S2	R.H.S
Z	1	−6	−5	0	0	0
S_1	0	1	1	1	0	5
S_2	0	3	2	0	1	12

٣- المتغير الداخل هو (X_1) والمتغير الخارج (S_2)

X_1	(0/3	3/3	2/3	0/3	1/3	12/3)
	0	1	2/3	0	1/3	4
Z الاولية −6	(0	1	2/3	0	1/3	4)
	0	−6	−4	0	−2	−24

Z القديمة	1	−6	−5	0	0	0
− Z الاولية	0	−6	−4	0	−2	−24
Z الجديدة	1	0	-1	0	2	24

S_1 الاولية 1	(0	1	2/3	0	1/3	4)
	0	1	2/3	0	1/3	4

s_1 القديمة	0	1	1	1	0	5
− s_1 الاولية	0	1	2/3	0	1/3	4
S_1 الجديدة	0	1	1/3	1	-1/3	1

B.V	Z	X1	X2	S1	S2	R.H.S
Z	1	0	−1	0	2	24
S_1	0	0	1/3	1	−1/3	1
X_1	0	1	2/3	0	1/3	4

بما انه هناك قيمة سالبة في دالة الهدف في جدول الحل الثاني اذ نقول لم نتوصل للحل الامثل ونعيد الخطوات على الجدول الاخير .

X_2 (0/1/3 0/1/3 1/3 /1/3 1/1/3 −1/3/1/3 1/1/3)

0 0 1 3 −1 3

X_1 الاولية 2/3 (0 0 1 3 −1 3)

0 0 2/3 2 −2/3 2

X_1 القديمة	0	1	2/3	0	1/3	4
− X_1 الاولية	0	0	2/3	2	−2/3	2
X_1 الجديدة	0	1	0	-2	1	2

z الاولية −1 (0 0 1 3 −1 3)

0 0 −1 −3 1 −3

z القديمة	1	0	−1	0	2	24
− z الاولية	0	0	−1	−3	1	−3
z الجديدة	1	0	0	3	1	27

B.V	Z	X1	X2	S1	S2	R.H.S
Z	1	0	0	3	1	27
X_2	0	0	1	3	−1	3
X_1	0	1	0	−2	1	2

وهنا حصلنا على الجدول النهائي وفيه جميع قيم دالة الهدف موجبة او صفر

فيكون انتاج ثلاث وحدات من (x2) و وحدتين من (x1) لزيادة الارباح بمقدار ($ 27)

Ex/5

حل النموذج التالي بطريقة الرسم البياني لتقليل الكلف ؟

$$Min(x_o) = x_1 + 2x_2$$

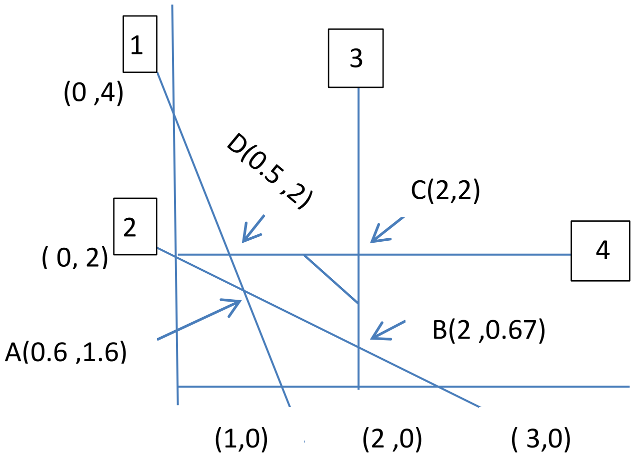
s.to $\quad 4x_1 + x_2 \geq 4$

$$2x_1 + 3x_2 \geq 6$$

$$x_1 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

X_1	X_2	
0	4	(0,4)
1	0	(1,0)
0	2	(0,2)
3	0	(3,0)
0	2	(0,2)



استخرجنا احداثيات نقاط منطقة الحل الامثل كالاتي :

اولاً : نقطة A ناتجة من تقاطع القيد الاول مع القيد الثاني

$$(4x_1 + x_2 = 4) * 3$$
$$2x_1 + 3x_2 = 6$$

$$12x_1 + 3x_2 = 12$$
$$2x_1 + 3x_2 = 6$$

$$10x_1 = 6 \Rightarrow x_1 = \frac{6}{10} = 0.6$$

نعوض في القيد الثاني عن قيمة x1 لنحصل على x2 وقيمتها (1.6)

ثانياً : نقطة B ناتجة من تقاطع القيد الثاني مع القيد الثالث
وبما ان قيمة X1 تساوي (2) من القيد الثالث اذن نعوض قيمتها في القيد الثاني ونستخرج (X2)

$$2(2) + 3X_2 = 6$$

$$3X_2 = 6 - 4 \Rightarrow X_2 = \frac{2}{3} = 0.67$$

ثالثاً : نقطة C ناتجة من تقاطع القيد الثالث مع الرابع وفي كلاهما قيمة (X1, X2) معلومة وهي 2

رابعاً : نقطة D ناتجة من تقاطع القيد الرابع مع القيد الاول وقيمة X2 معلومة من القيد الرابع وهي 2 نعوضها في القيد الاول لنستخرج X1

$$4X_1 + 2 = 4$$

$$4X_1 = 4 - 2 \Rightarrow X_1 = \frac{2}{4} = 0.5$$

ثم نعوض عن هذه النقاط في دالة الهدف ونختار اقل قيمة لان دالة الهدف هي تقليل كلفة كالاتي :

$$A(0.6, 1.6): Min(x_o) = 0.6 + 2(1.6) = 3.8$$

$$B(2, 0.67): Min(x_o) = 2 + 2(0.67) = 3.34$$

$$C(2, 2): Min(x_o) = 2 + 2(2) = 6$$

$$D(0.5, 2): Min(x_o) = 0.5 + 2(2) = 4.5$$

اذن نقطة B هي الحل الامثل لاتها تمثل اقل كلفة حينما ننتج 2 وحدة من X_1 و 0.67 وحدة من X_2 لتقليل كلف بمقدار 3.34 وللتحقق من الحل نعوض عن قيمة x1 و x2 في دالة الهدف (2, 0.67) B فتكون :

Min (x_0)= 2 +2(0.67)
= 2+1.34
= 3.34

الاساليب الكمية Quantitative techniques

- النموذج الثنائي (المقابل) تعريف المشكلة الثنائية
- تحويل النموذج الاولي(الاساسي) الى النموذج الثنائي

النماذج الثنائية في البرمجة الخطية

Duality in Linear Programming

مقدمة :

لكل مشكلة في البرمجة الخطية نموذج رياضي خطي يعبر عنها يسمى (النموذج الاساسي – Primal Model) يوجد لها عادة نموذج رياضي مقابل له ويتم التوصل من خلاله الى نفس النتائج التي يتوصل اليها النموذج الاساسي عند حله يسمى هذا النموذج بـ (النموذج الثنائي المقابل Dual Model)

يستخدم النموذج المقابل للأغراض الاتية :

١- التوصل الى الحل الامثل لمشاكل البرمجة الخطية .
٢- سرعة التوصل للحل عندما يصعب حل النموذج الاساسي .
٣- لغرض التعرف على ابعاد المشكلة الاخرى (البديلة) فأذا كان النموذج الاساسي بصيغة التعظيم (MAX) تعظيم الربح فبإمكاننا التعرف على النموذج الثنائي (MIN) وتمثيله جانب الكلفة .

تعريف النموذج الثنائي المقابل:

(هو عملية عكس النموذج الاساسي بكل محتوياته)

أولاً : تكوين النموذج الثنائي كما يلي :-

أ- اذا كانت دالة الهدف (Max) تصبح (MIN) والعكس صحيح .

ب- نستبدل ($X_{\circ}$) بـــ (Y_o) في دالة الهدف.

ت- الجانب الايمن من النموذج الاساسي مع اشاراته يكون معاملات متغيرات دالة الهدف في النموذج الثنائي حسب التسلسل .

ث- معاملات دالة الهدف الاساسية تكون عناصر الجانب الايمن للنموذج الثنائي بالترتيب ومع الاشاره .

ج- معاملات المتغير الاول (X_1) في النموذج الاساسي عمودياً تصبح معاملات القيد الاول في النموذج الثنائي ، ومعاملات المتغير الثاني (X_2) في النموذج الاساسي تصبح معاملات القيد الثاني وهكذا ، بحيث يصبح عدد قيود الثنائي مساوي تماماً لعدد المتغيرات الاساسية ، وعدد المتغيرات الثنائية مساوي تماماً لعدد القيود في النموذج الاساسي.

ح- اذا كانت دالة الهدف الثنائية (Max) فأن جميع المتباينات تصبح (اصغر من اويساوي) واذا كانت دالة الهدف الثنائية (Min) فأن جميع المتباينات تصبح (اكبر من اويساوي)

خ- اذا كان احد المتغيرات الاساسية غير مقيد بأشاره فأن القيد الثنائي المناظر له يكون بعلامة مساواة (=)

د- اذا كان احد القيود الاساسية بعلامة مساواة (=) فأن المتغير الثنائي المقابل له يكون (متغير غير مقيد بأشاره nsv) .

ذ- ملاحظة(ان المتغير X_1 يناظر القيد الثنائي الاول ، المتغير الثاني يناظر القيد الثنائي الثاني وهكذا)

Ex/1

مزارع له ارض زراعية مساحتها 150 هكتار وفي اطار الاستفادة من مياه السد المجاور له تمنحه الدولة ما مقداره 440 M^3 ماء وهو مايكفي لـ 480 ساعة عمل ويمكن زراعة هذه الارض بمحصولي الطماطم والفاصوليا ، ولخصت معطيات المشكلة كما يلي :

فاصوليا	طماطم	
2	1	ساعات العمل
2	4	ماء (م٣)
200	100	الربح المتوقع للهكتار

م// جد النموذج الثنائي المقابل للنموذج الاصلي ؟

SOL/

النموذج الاساسي :

$$Max\,(x_o)=100x_1+200x_2$$

s.to

$$x_1+x_2\le 150$$
$$x_1+2x_2\le 480$$
$$4x_1+2x_2\le 440$$
$$x_1,x_2\ge 0$$

النموذج الثنائي المقابل :

$$Min(y_o)=150y_1+480y_2+440y_3$$

s.to

$$y_1+y_2+4y_3\ge 100$$
$$y_1+2y_2+2y_3\ge 200$$
$$y_1,y_2,y_3\ge 0$$

المعنى الاقتصادي للنموذج الثنائي :

في هذه المسألة لنفرض ان هناك زبون أخر يعني مزارع اخر لاحظ ان صاحب المزرعة يمر بظروف خاصة ولا يستطيع زراعة الارض فقرر شراء اجمالي الموارد المتاحة (الارض ، الماء ، ساعات العمل) ، وبلا شك ان المزارع الاصلي يقبل العرض من الزبون اذا كان السعر المقترح من طرف الزبون يمكنه من الحصول على نفس الربح الذي كان يحصل عليه عند استغلاله لأرضه بنفسه تحت قيد اوشرط ان يكون :

Y1 : سعر تأجير الارض (هكتار واحد)

Y2 : سعر ساعة العمل

Y3: سعر 1 m^3 من الماء

$$y_1+y_2+4y_3\ge 100$$

$$y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 200$$

وبلا شك ان مسألة الزبون هي تخفيض تكاليف شراء او تأجير الموارد المتاحة الى ادنى حد ممكن وذلك تحت قيد ان الاسعار سترضي المزارع الاصلي ، اي انه بالنسبة للمزارع الاصلي فأن هكتار من الارض وساعة عمل واحدة و4م٣ من الماء من اجل انتاج هكتار طماطم يكافئ دخلا مقداره (100) الف دينار وهذا يعني ان المزارع الاصلي لن يكون على استعداد لتأجير موارده المتاحة الا اذا ضمن هذا الربح .

/2 حول النموذج الاساسي التالي الى نموذج ثنائي مقابل ؟

$$Max\,(x_o) = 3x_1 + 4x_2 + 8x_3$$

s.to

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 15$$

$$6x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 25$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

الحل //

١- ان النموذج متماثل لان دالة الهدف تعظيم وجميع القيود (أصغر او يساوي)

٢- نمنح (y_o) مقابل دالة الهدف و (y_1) مقابل القيد الاول و (y_2) مقابل القيد الثاني .

Sol//

$$Min(y_o) = 15y_1 + 25y_2$$

s.to

$$y_1 + 6y_2 \geq 3$$

$$y_1 + 4y_2 \geq 4$$

$$2y_1 + 2y_2 \geq 8$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

ونجد بأن اول فائدة حققناها هي امكانية حل هذا النموذج بطريقة الرسم لان عدد المتغيرات اصبحت اثنين

Ex/3

جد النموذج الثنائي المقابل للنموذج الاساسي التالي :

$$Max\,(x_o) = x_1 + x_2$$

s.to

$$3x_1 + x_2 + x_3 \leq 6$$

$$x_1 - x_2 + x_3 = 4$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \qquad , \quad x_3(usv)$$

الحل //

نحول النموذج الى الصيغة المتماثلة بضرب القيد الثالث بـ (1-) لان تباينه (اكبر او يساوي) ودالة الهدف تعظيم ، ليصبح النموذج بالصيغة المتماثلة كما يلي :

$$Max\,(x_o) = x_1 + x_2 + 0x_3$$

s.to $\quad 3x_1 + x_2 + x_3 \le 6$

$$x_1 - x_2 + x_3 = 4$$

$$-x_1 - 2x_2 - 0x_3 \le -1$$

$$x_1, x_2 \ge 0 \qquad , x_3: \text{usv}$$

اذن النموذج الثنائي هو :

$$Min(y_o) = 6y_1 + 4y_2 - y_3$$

s.to $\quad 3y_1 + y_2 - y_3 \ge 1$

$$y_1 - y_2 - 2y_3 \ge 1$$

$$y_1 + y_2 = 0$$

$$y_1, y_3 \ge 0, y_2 : usv$$

لاحظ اضفنا ($0X_3$) الى دالة الهدف الاساسية للموازنة وكذلك الى القيد الثالث ، ان القيد الثنائي الثالث جعلنا اشارته مساواة لان المتغير الثالث الاساسي كان غير مقيد بأشاره ، وان المتغير الثنائي الثاني غير مقيد بأشاره لان القيد الاساسي الثاني كانت علاقته مساواة .

Ex/4

حول النموذج الاساسي الاتي الى النموذج الثنائي المقابل ؟

$$Max\,(x_\circ) = 3x_1 + 2x_2$$

$s.to$

$$6x_1 + 4x_2 \le 24$$

$$x_1 + 3x_2 \le 3$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

بما ان النموذج متماثل فيكون النموذج الثنائي المقابل كالاتي :

$$Min(y_\circ) = 24y_1 + 3y_2$$
$s.to$
$$6y_1 + y_2 \geq 3$$
$$4y_1 + 3y_2 \geq 2$$
$$y_1, y_2 \geq 0$$

Ex/5

حول النموذج الاساسي الاتي الى النموذج المقابل ؟

$$Min(x_\circ) = 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 4x_4$$

s.to $(2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 \leq 20) * -1$
$$4x_1 + 2x_2 + x_4 \geq 30$$
$$5x_1 + 3x_4 \geq 35$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

بما ان النموذج غير متماثل فعلامة القيد الاول اصغر اوتساوي ودالة الهدف min اذن نضرب القيد الاول بـ (1-) لكي يصبح متماثل ثم نحوله الى الثنائي كالاتي :

$$Max(y_\circ) = -20y_1 + 30y_2 + 35y_3$$

s.to $-2y_1 + 4y_2 + 5y_3 \leq 2$
$$-3y_1 + 2y_2 \leq -3$$
$$4y_1 \leq 3$$
$$2y_1 + y_2 + 3y_3 \leq 4$$
$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

Ex/6

$$Max(x_\circ) = x_1 + x_2 - x_3$$

s.to $3x_1 + 4x_2 - 5x_3 \leq 14$
$$(5x_1 + 2x_3 \geq 6) * -1$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

بما ان النموذج غير متماثل نضرب القيد الثاني بـــ(1-)

$$Min(y_\circ) = 14y_1 - 6y_2$$

s.to
$$3y_1 - 5y_2 \geq 1$$
$$4y_1 \geq 1$$
$$-5y_1 - 2y_2 \geq -1$$
$$y_1, y_2 \geq 0$$

Ex/7

اكتب النموذج المقابل لمسألة البرمجة الخطيه الاتية ؟

$$Min(x_o) = 4x_1 + 5x_2 + 3x_3$$

s.to $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 2500$ *-1
$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 750$$
$$x_1 \geq 250$$
$$x_2 = 300$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

نحول النموذج الاساسي الى نموذج متماثل بضرب القيد الاول (1-)

$$Min(x_o) = 4x_1 + 5x_2 + 3x_3$$

s.to
$$-2x_1 - 3x_2 - 4x_3 \geq -2500$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 750$$
$$x_1 \geq 250$$
$$x_2 = 300$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

النموذج المقابل :

$$Max(y_o) = -2500y_1 + 750y_2 + 250y_3 + 300y_4$$

s.to
$$-2y_1 + y_2 + y_3 \leq 4$$
$$-3y_1 + y_2 + y_4 \leq 5$$
$$-4y_1 + y_2 \leq 3$$
$$y_1, y_2, y_3 \geq 0, y_4(usv)$$

نماذج النقل **Transportation Models**

النقل نوعان /

النقل غير التقليدي : والذي يهتم بنقل الخبرات المعنوية ويسمى ايضاً (نظرية التخصيص) والتي تم دراستها سابقاً .

النقل التقليدي : وهو نقل الاشياء المادية الملموسة المتعارف عليها وزن ، كميات ، لذلك فأن الغرض من دراسة نماذج النقل هو الحصول على نقل الكمية المطلوب نقلها من اكثر من مكان الى اكثر من جهة بأقل كلفة ممكنة ، بمعنى تصغير كلفة النقل .

ولدراسة الموضوع نحتاج الى تعريف بعض المصطلحات التي تستخدم في نموذج النقل :

١- المصادر : هي مراكز المواد المطلوب النقل منها (مخازن ، مصانع ، مستودعات) وتسمى عادة مصادر (Sources) ويرمز لها عادة (si).
٢- الوجهة : هي النقاط التي تنقل اليها المواد (اسواق ، مستهلكين ، مراكز طلب) وتسمى عادة نهايات (Destinations)ويرمز لها بالرمز (di)
٣- العرض : الكمية الموجودة في المصادر والتي يراد نقلها الى النهايات ويرمز لها (ai) .
٤- الطلب : الكمية المطلوب نقلها الى النهايات والموجودة في المخازن ويرمز لها (bj) .
٥- الكلفة : هي كلفة نقل الوحدة المستخدمة الواحدة من المواد من المصدر (i) الى النهاية (j) ويرمز لها (cij) وتكتب داخل مربع صغير في الركن الاعلى الايمن داخل كل خليه .
٦- الكمية : هي كمية المواد المطلوب نقلها من المصدر (i) الى النهاية (j) والتي تحقق اقل كلفة ممكنة ، ويرمز لها (xij) وتكتب عادة داخل الخلية الاساسية وفي وسطها وهي المتغيرات التي نبحث عنها .
٧- الكلفة الكلية : هي مجموع كلفة نقل المعروض لسد احتياجات كل الاسواق (النهايات) ويرمز لها عادة Total Cost (TC) .
٨- الخلايا : هي المربعات التي تتشكل داخل جدول مشكلة النقل ، والتي يذكر فيها كلفة نقل الوحدة الواحدة (cij) والكمية المنقولة ان وجدت (xij) ، من المخزن الى السوق وتعتبر الخلية أساسية اذا حصل فيها نقل كميات ، وغير اساسية اذا لم يحصل فيها نقل كميات

- عناصر النموذج
  ١- دالة الهدف : غايتها دائماً الحصول على اقل كلفة ممكنة Min TC
  ٢- القيود : هي كمية المواد المعروضة وكمية المواد المطلوبة .
  ٣- شرط اللاسلبية : لايمكن نقل كميات اقل من الصفر .

انواع نماذج النقل

١- النموذج متوازن : وفيه كمية المواد المعروضة (العرض) تساوي الكمية المطلوبة (الطلب) .
٢- نموذج غير متوازن : وفية الكمية المعروضة لا تساوي كمية الطلب فأذا كان العرض اكبر من الطلب نستحدث (سوق وهمي) ننقل له الفرق بينهما بكلفة تساوي صفر ،

واذا كان العرض اقل من الطلب نستحدث (مصدر وهمي) لسد الفرق وبكلفة نقل قدرها صفر فيتحول الى نموذج متوازن .

مراحل حل النموذج

المرحلة الاولى : ايجاد الحل الاساسي : ولها ثلاث طرق

١- طريقة الركن الشمالي الغربي .
٢- طريقة اقل الكلف .
٣- طريقة فوجل .

أولاً : طريقة الركن الشمالي الغربي
أ- في حالة النموذج متوازن

EX/1

جد الحل الاساس لمشكلة النقل التالي بطريقة الركن الشمالي الغربي (افرض الكميات بالطن والكلفة بالدولار)

أسواق

مخازن	D_1	D_2	D_3	Ai
S_1	5 100	3	4	100 0
S_2	3 10	6 50	2 30	90 80 30 0
S_3	3	2	3 50	50 0
Bj	110 10 0	50 0	80 50 0	240 240

خطوات الحل :

١- التأكد من النموذج متوازن أي ان مجموع الطلب = مجموع العرض

٢- نختار الخلية الاعلى الى اليسار (الشمالي الغربي) وهي الخلية (1,1) اي المصدر الاول والسوق الاول ونشبعها بالكمية الاقل ما بين الطلب والعرض وبما ان العرض 100 والطلب 110 اذن نضع فيها الكمية الاقل وهي 100 ، بمعنى ننقل الكمية الموجودة في المخزن s_1 الى السوق D_1 ونحدث الكميات الباقية في المخزن والمطلوبة في السوق فنجد ان المخزن قد نفدت جميع كمياته ونستبعده من الحل اما السوق فبقي يحتاج الى 10 وحدات وهكذا الى ان ننقل كل الكميات المعروضة الى الاسواق .

٣- ثم نحسب الان الكلفة الكلية من خلال ضرب الكمية المنقولة في كل خلية اساسية * الكلفة المؤشرة داخل الخلية .

$$TC= 100(5) + 10(3) + 50(6) + 30(2) + 50(3) = 1040$$

ملاحظة : يجب التأكد قبل قرار الحل النهائي ان عدد الخلايا الاساسية (المشغوله) = (عدد الصفوف +عدد الاعمدة – 1)

Ex/ 2

اذا كانت لديك البيانات التالية عن كلف كميات من المنتجات واريد نقلها من المخازن الى الاسواق فأحسب الكلفة الكلية للنقل بأستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي ؟

مخازن	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	Ai
S_1	10 100	7	4	1	4	100 0
S_2	2 100	7 150	10	6	11	250 150 0
S_3	3	5 50	3 100	2 50	2	200 150 50 0
S_4	4	8	12	10 50	12 250	300 250
	200 100 0	200	100	100 50	250	850 850

$$TC = 100(10) + 100(2) + 150(7) + 50(5) + 100(3) + 50(2) +50(10) + 250(12) = 6400$$

ثانياً / طريقة اقل كلفة

The Least Cost Method

وهي افضل من طريقة الركن الشمالي الغربي وتستخدم لإيجاد الحل الافضل ووجدت هذه الطريقة لانه يعاب على طريقة الركن الشمالي الغربي عدم تحقيق الاستفادة من التكلفة القليلة المتوفرة في مشكلة نقل معينة عند تلبية احتياجات مراكز الطلب .

على ماذا تركز طريقة اقل التكاليف ؟

اختيار اقل كلفة متوفرة في الجدول ومن ثم تحديد جهتي العرض والطلب واختيار اقلهما وتعديل الكميات كل مرة حتى استنفاذ الكميات .

خطوات الحل بأستخدام طريقة اقل التكاليف :-

١- التحقق من توازن الجدول اي العرض = الطلب
٢- نبدأ بالخلية الاقل تكلفة ونلبي احتياجاتها بأقل كمية .
٣- اذا تساوت اكثر من خلية بنفس التكلفة نختار احدهما وننتقل الى الاخرى وهكذا حتى نفاذ الكمية .
٤- نحسب التكاليف الكلية .

Ex/1

حل نموذج النقل التالي مستخدماً طريقة اقل التكاليف ؟

بما ان الجدول متوازن العرض = الطلب = 60

سنبدأ بأختيار اقل كلفة في الجدول وهي 1 ونلبي احتياجاتها بأقل كمية وهكذا الى ان تستنفذ كل الكميات المعروضة .

s \ D	D_1	D_2	D_3	D_4	Ai
S_1	2	5 6	5	3 14	20 6 0
S_2	1 13	3 2	2	4	15 2 0
S_3	2	4 9	1 16	3	25 9 0
Bj	13 0	17 15 0	16 0	14 0	60 60

نحسب الكلفة الكلية

TC= 6(5) + 14(3) + 13(1) + 2(3) + 9(4) + 16(1) = 143 $

EX/2 :

حل نموذج النقل التالي مستخدماً طريقة اقل التكاليف ؟

s \ D	D_1	D_2	D_3	Ai
S_1	2	1	3	100
S_2	5	4	0	150
S_3	2	3	0	50
Bj	100	120	60	300 280

بما ان النموذج غير متوازن حيث ان العرض اكبر من الطلب فأننا نستحدث سوق جديد ونضع فيه الفرق الحاصل بين العرض والطلب بتكلفة مقدارها صفر وكالاتي :-

بما ان اقل كلفة هي الصفر فنختار الصفر المقابل لاقل الكميات وهي 50 ثم نبدا الحل :

S \ D	D_1	D_2	D_3	D_4	Ai
S_1	[2]	[1] 100	[3]	[0]	100 0
S_2	[5] 70	[4] 20	[0] 60	[0]	150 90 20 0
S_3	[2] 30	[3]	[0]	[0] 20	50 30 0
Bj	100 70 0	120 20 0	60 0	20 0	300 / 300

نحسب الكلفة الكلية

TC = 100(1) + 70(5) + 20(4) + 60(0) + 30(2) +20(0)

= 100+ 350 + 80 + 0 + 60 + 0 = 530 $

EX/3

حل نموذج النقل الاتي بطريقة اقل كلفة ؟

S \ D	D_1	D_2	D_3	D_4	Ai
S_1	[2] 10	[1] 200	[10]	[5]	210 10 0
S_2	[6] 230	[7]	[2] 150	[3]	380 230
S_3	[4] 160	[9]	[12]	[1] 250	410 160 0
Bj	400 390 230	200 0	150 0	250 0	1000 / 1000

ثم نحسب الكلفة الكلية

TC= 10(2) + 200(1) + 230(6) + 150(2) + 160(4) +250(1)

= 20 + 200 + 1380 + 300 + 640 + 250 = 2790 $

ثالثاً : طريقة فوجل التقريبية

خطوات الحل //

١- يجب ان تكون مسألة النقل متوازنة اذا لم تكن متوازنة اما نضيف صف وهمي او عمود وهمي .
٢- نجد الفرق بين اقل كلفتين من كل صف وكل عمود .
٣- نأخذ الفرق الاكبر سواء كان من الصفوف او من الاعمدة ونلاحظ اقل كلفة في الصف او العمود ونبدأ الحل بوضع اقل كمية في الكلفة الاقل ثم نعدل الكميات بعدها نأخذ الفرق الاكبر ايضاً ونجري نفس العملية السابقة الى ان تستنفذ كل الكميات المعروضة .
٤- لايشترط في هذه الطريقة ان تكون عدد الخلايا المشغولة مساوية لعدد الصفوف + عدد الاعمدة - ١
٥- ثم نحسب الكلفة الكلية .

Ex/1

حل نموذج النقل الاتي بطريقة فوجل التقريبية ؟

S \ D	D_1	D_2	D_3	D_4	Ai	الغرامات
S_1	10 1000	8 300	6 500	4 200	2000 1000 500 300	~~2~~ 2 2
S_2	14	7	5	2 1300	1300 0	~~3~~ 3 -
S_3	18	7 1700	11	9	1700 0	~~2~~ 2 2 2
Bj	1000 0	2000 1700	500 0	1500 200 0	5000 5000	
الغرامات	~~4~~	~~1~~ 1 1	~~1~~ 1 5	~~2~~ 2 5 5		

TC= 1000(10) + 300(8) + 500(6) + 200(4) + 1300(2) + 1700(7)
= 1000 + 2400 +3000 + 800 + 2600 + 11900 = 21700

Ex/2

في حالة النموذج غير متوازن

حل نموذج النقل الاتي بطريقة فوجل التقريبية ؟

S \ D	D_1	D_2	D_3	D_4	Ai
S_1	10	13	22	17	200
S_2	14	13	19	15	350
S_3	9	20	3	10	150
Bj	100	140	300	250	700 / 790

S \ D	D_1	D_2	D_3	D_4	Ai	الغرامات
S_1	10 100	13 100	22	17	200 100 0	3 3 3 4
S_2	14	13 40	19 210	15 100	350 310 210 0	1 1 1 2
S_3	9	20	30	10 150	150 0	1 1 -
S_4	0	0	0 90	0	90 0	
Bj	100 0	140 40 0	300 210 0	250 100 0	790 / 790	
الغرامات	~~9~~ 1 4	~~13~~ 0 0	~~19~~ 3 3	10 5 2 2		

Ex/3

حل نموذج النقل الاتي بطريقة فوجل التقريبية ؟

S \ D	D_1	D_2	D_3	Ai	الغرامات
S_1	5 2	1 10	8	12 2 0	4 4
S_2	2 3	4	0 11	14 3 0	2 2 2
S_3	3 4	6	7	4 0	3 3 3
Bj	9 5 2 0	10 0	11 0	30 30	
الغرامات	1 1 1	3 3	7		

TC = 2(5) + 10(1) + 3(2) + 11(0) + 4(3) = 38 $