وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة تكريت

كلية الإدارة والاقتصاد

قسم ادارة الاعمال

المرحلة الاولى

محاضرات في مادة الاحصاء

مدرس المادة

أ.م.د هادي مران احمد

1446 هـ

2024 مـ

الفصل الرابع

مقاييس التشتت

مقدمة :

وهي نوع آخر من المقاييس الإحصائية التي تصف المجموعات الإحصائية أو التوزيعات التكرارية في المقاييس التي سبق ذكرها ، فلو فرضنا لدينا الراتب الشهري لخمسة موظفين وكان بالصورة التالية :

100 , 17 , 21 , 22 , 25 فالوسط الحسابي لهذه الرواتب والذي هو عبارة عن :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{25+22+\cdots+100}{5} = 37$$

هذا المتوسط الذي يستخدم لتمثيل الرواتب لا يمثلها تمثيلاً صحيحاً لهذا السبب سوف نستخدم مقاييس أخرى ، وهي مقايس التشتت والهدف من دراسة التشتت هو تكوين فكرة عن مدى تجانس قيم مجموعة من المفردات ، وهذا يعني أن دراسة التشتت أمر مفيد في إجراء المقارنة بين مجموعتين أو أكثر من البيانات ، وكلما كان مقياس التشتت كبيراً دل ذلك على عدم التجانس بين القيم ويكون مقياس التشتت صغيرا عندما يكون الاختلاف من بين قيم المشاهدات قليل ، ولمقياس التشتت أهمية أيضاً في وصف التوزيعات ومقارنتها مع بعضها.

ملاحظة :

قد يتساوى الوسط الحسابي لمجموعتين من القيم بينما يختلف مدى انتشار القيم في المجموعة الأولى عن المجموعة الثانية كما مبين أدناه :

إذا كانت قيم المجموعة الأولى هي : 17 , 20 , 23 , 18 , 12 , 21 , 22

وكانت قيم المجموعة الثانية هي : 35 , 10 , 7 , 5 , 45 , 20 , 13

فالوسط الحسابي لكلا المجموعتين مساوي(20) ولكن المجموعة الأولى متجانسة أكثر من الثانية.

أهم مقاييس التشتت :

أولاً : مقاييس التشتت المطلقة :

وهي التي تقيس تشتت المفردات بدلالة الوحدات المطلقة المستخدمة في قياس الظاهرة مثل فلس ، دينار ، درجة ، وزن ، كثافة ... الخ ، ومنها :

أ- مقاييس تقيس تشتت المفردات بينها ومنها على سبيل المثال :

1- المدى.

ب- مقاييس تقيس تشتت المفردات حول الوسط الحسابي ومنها :

1- الانحراف المتوسط. 2- التباين والانحراف المعياري.

ثانياً : مقاييس التشتت النسبية :

وهي التي تقيس تشتت المفردات بدلالة النسب المئوية وأهمها ما يسمى بمعامل الاختلاف.

أولاً : مقاييس التشتت المطلقة :

1- المدى : في حالة البيانات غير المبوبة :

يعتبر المدى أبسط أنواع مقاييس التشتت المطلقة ويعرف بأنه الفرق بين أكبر قيمة في مجموعة البيانات وأصغر قيمة حيث :

$R = x_L - x_s$

R = يمثل مقياس المدى

X_L:يمثل أكبر قيمة في مجموعة البيانات.

X_s : يمثل أصغر قيمة في مجموعة البيانات.

مثال 1 : أوجد المدى للقيم التالية :

X_i : 2 , 10 , 12 , 15 , 22

$R = x_L - x_s \rightarrow 22 - 2 = 20$

المدى في حالة البيانات المبوبة :

ويتم حساب المدى للبيانات المبوبة بإيجاد حاصل الفرق بين الحد الأعلى للفئة الأخيرة والحد الأدنى للفئة الاولى ، أي أن :

المدى = الحد الاعلى للفئة الاخيرة – الحد الأدنى للفئة الاولى :

مثال 2 : أوجد المدى للجدول التكراري التالي :

الحل :

الحد الأدنى للفئة الأولى – الحد الاعلى للفئة الأخيرة =R

$R = 80 - 40 = 40$

الفئات	f_i
40 – 50	2
50 – 60	10
60 – 70	15
70 – 80	3

ب– مقاييس تشتت المفردات حول الوسط الحسابي :

1– الانحراف المتوسط : وهو من مقاييس التشتت التي تقيس تشتت المفردات حول وسطها الحسابي الحقيقي ويعتمد على القيمة المطلقة للانحرافات.

أ– في حالة البيانات الغير مبوبة : إذا كان $x_1 , x_2 , \ldots , x_n$ مجموعة من المشاهدات أو القيم فالانحراف المتوسط لها هو متوسط الانحرافات المطلقة (بإهمال الإشارة) عن وسطها الحسابي الحقيقي ويرمز له بالرمز M.Dوعليه فأن الانحراف المتوسط هو :

$$M.D. = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left| x_i - \bar{x} \right|}{n}$$

مثال 3 :

أوجد الانحراف المتوسط للبيانات التالية :

x_i	$x_i - x$	$\|xi - x\|$
9	9 − 7 = 2	|2| = 2
8	8 − 7 = 1	1 = 1
6	6 − 7 = −1	|−1| = 1
5	5 − 7 = −2	|−2| = 2
7	7 − 7 = 0	|0| = 2
35		6

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{35}{5} = 7$$

$$M.D. = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left| x_i - \overline{x} \right|}{n} = \frac{6}{5} = 1.2$$

ب− في حالة البيانات المبوبة :

إذا كان $x_1 , x_2 , \ldots , x_n$ تمثل مراكز الفئات في جدول التوزيع التكراري وتكراراتها $f_1 , f_2 , \ldots , f_m$ فأن الانحراف المتوسط هو :

$$M.D. = \frac{\sum_{i=1}^{m} f_i \left| x_i - \overline{x} \right|}{\sum_{i=1}^{m} f_i}$$

مثال 4: أوجد الانحراف المتوسط لجدول التوزيع التكراري التالي والذي يمثل عدد الموظفين المحالين على التقاعد موزعين حسب الفئات العمرية.

الحل :

الفئات	fi	xi	fi xi	$x_i - \bar{x}$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$fi \lvert x_i - \bar{x} \rvert$
60 – 62	5	61	(5) (61) = 305	61 – 67.45 = 6.45	6.45	(5) (6.45) = 32.25
63 – 65	8	64	1152	64 – 67.45 = 3.45	3.45	(8) (3.45) = 68.1
66 – 68	42	67	2814	67 – 67.45 = 0.45	0.45	18.9
69 – 71	27	70	1890	3.45	3.45	68.85
73 – 74	8	73	584	5.55	5.55	44.40
	100		6745			226.5

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{m} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{m} f_i} = \frac{6745}{100} = 67.45$$

$$M.D. = \frac{\sum_{i=1}^{m} f_i \left| x_i - \bar{x} \right|}{\sum_{i=1}^{m} f_i} = \frac{226.5}{100} = 2.265$$

2- مقاييس تقيس تشتت المفردات حول الوسط الحسابي :

التباين والانحراف المعياري The variance and standard Deviations:

- **التباين :** يعرف التباين بأنه مربع الانحراف المعياري ويرمز له بالرمز $S2$وعليه فأن وحدات قياس التباين تمثل مربع وحدات قياس المتغير الأصلي.
- **الانحراف المعياري :** من أهم مقاييس التشتت وأكثرها استخداماً وشيوعاً وأهمية الانحراف المعياري كمقياس تأتي كأهمية الوسط الحسابي بالنسبة للمتوسطات.

ويعرف الانحراف المعياري لمجموعة من القيم بأنه الجذر التربيعي لمتوسط مربعات انحرافات القيم من وسطها الحسابي الحقيقي.

طرق حساب التباين والانحراف المعياري :

1- في حالة البيانات غير المبوبة :

مثال : أوجد التباين والانحراف المعياري للبيانات التالية والتي تمثل عدد المنتوجات اليومية من المصابيح الكهربائية لمصنع انتاج المصابيح الكهربائية :

x_i	$x_i - \bar{x}$	$(xi - x)^2$
3	3 − 11 = −8	$(-8)^2$= 64
7	7 − 11 = −4	$(-4)^2$ = 16
10	−1	1
15	4	16
20	9	81
55		178

$= \frac{\sum xi}{n} = \frac{55}{5} = 11\bar{x}$

$= \frac{\sum(xi - \bar{x})^2}{n} s^2$

$= \frac{178}{5} = 35.6s^2$

ويمكن ايجاد الانحراف المعياري عن طريق جذر التباين

$S = \sqrt{35.6} = 5.9$

$S = \sqrt[2]{\frac{\sum(xi - \bar{x})^2}{n}}$

$S = \sqrt{\frac{178}{5}} = \sqrt{35.6} = \mp 5.9 = \mp 6$

ب- حساب التباين والانحراف المعياري في حالة البيانات المبوبة :

لتكن $x_1 , x_2 , \ldots , x_m$ تمثل مراكز الفئات لتوزيع تكراري عدد فئاته f_m , ... , f_1 , f_2 تمثل التكرارات المقابلة لهذه الفئات ، عندئذ وحسب التعريف لهذا المقياس يمكن حساب قيمته وفق الصيغة التالية :

$$s^2 = \frac{\sum fi\,(xi-\bar{x})^2}{\sum fi}$$

$\bar{x}$ و $\sum_{i=1}^{n} f_i = n$ حيث ان : تمثل الوسط الحسابي في حالة البيانات المبوبة ويكون

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

مثال 6 : أوجد التباين والانحراف المعياري للجدول التالي ، علماً أن البيانات التالية تمثل عدد الموظفين المحالين على التقاعد حسب فئاتهم العمرية.

الفئات	Fi	Xi	fi xi	(xi – x)	$(x_i-\bar{x})^2$	$fi(x_i-\bar{x})^2$
60 – 62	5	61	(5) (61) = 305	−5.45	29.70	5 (29.70) = 148.5
63 – 65	18	64	1152	−2.45	6	18 (6) = 108
66 – 68	42	67	2814	−0.55	0.30	42 (0.30) = 12.6
69 – 71	27	70	1790	3.55	12.60	27 (12.60) = 340.2
72 – 74	8	73	584	6.55	42.90	8 (42.90) = 343.2
المجموع	100		66.45			952.5

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{6645}{100} = 66.45$$

$$= \frac{\sum fi\,(xi-\bar{x})^2}{\sum fi} s^2$$

$= \frac{952.5}{100} = 9.52$

وعلية فان الانحراف المعياري هو :

$S = \sqrt{s^2} = \sqrt{9.52}$

$S = 3.08$

$$S = \sqrt[2]{\frac{\sum fi\,(xi-\bar{x})^2}{\sum fi}} = \sqrt{\frac{952.5}{100}} = \sqrt{9.52}$$

ثانياً : مقاييس التشتت النسبية : من أهم مقاييس التشتت النسبية هو ما يسمى بمعامل الاختلاف وهناك عدة أنواع من معاملات الاختلاف كل نوع يستخدم حسب التجربة ونوع الجدول وأهم أنواعها هو :

معامل الاختلاف القياسي ويعرف بالقانون :

$$\text{معامل الاختلاف} = \frac{\text{الانحراف المعياري}}{\text{الوسط الحسابي}} * 100\%$$

وباللغة الانكليزية يكتب :

$$C.V = \frac{s}{\bar{x}} * 100\%$$

مثال 6 :

أجريت دراسة لطول النباتات بالسم لأحد المحاصيل وكمية المحصول بالكغم لـ 150 نباتاً من نباتات الذرة وكانت النتائج مقسمة بالصورة التالية بالنسبة لصفة الطول وبكمية المحصول والمطلوب المقارنة بين تشتت الصيغتين :

الطول	كمية المحصول
$200 \rightarrow \bar{x}$	800
$16 \rightarrow S$	36

$$C.V. = \frac{s}{\bar{x}} * 100\%$$

بالنسبة للطول $= \frac{16}{200} * 100\% = 8\%$

بالنسبة لكمية المحصول $C.V. = \frac{36}{800} * 100\% = 4.5\%$

نلاحظ تشتت الطول أكبر مما عليه بالنسبة لكمية المحصول.